Chapitre 4

Séries numériques

Que signifie l'écriture décimale $\pi = 3,141592653...$? De manière plus générale, que signifie pour un nombre réel positif x d'avoir pour écriture décimale $a_{-N} \cdots a_0, a_1 a_2 a_3 a_4...$, où $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour $i \geq -N$?

Tout d'abord qu'est ce que l'écriture décimale d'un nombre entier ? Écrire un nombre entier x sous la forme $a_{-N} \cdots a_0$ signifie $x = \sum_{n=0}^{N} a_{-n} 10^n$. Une telle écriture est unique et a_0 est juste le reste de la division euclidienne de x par 10. $a_{-N} \cdots a_1$ est alors l'écriture en base dix du quotient de la division euclidienne de x par 10.

Si x est un réel positif, on écrit alors $x = E(x) + (x - E(x))$ où $E(x)$ est la partie entière de x. On sait donc écrire $E(x)$ en base dix, reste donc à voir comment écrire $(x - E(x)) \in [0, 1[$ en base 10.

Pour construire les décimales d'un nombre x de $[0, 1[$, on pose $a_0 = 0$ puis $x_0 = 0$. La première décimale, le chiffre a_1, est alors définie comme la partie entière de $10(x - x_0)$ et on pose $x_1 = x_0 + a_1 10^{-1}$. Comme $0 \leq 10(x - x_0) - a_1 < 1$, on a $0 \leq x - x_1 < 10^{-1}$. On construit alors par récurrence la suite des décimales (a_n) et la suite des approximations (x_n) de sorte que $0 \leq x - x_n < 10^{-n}$. Si les deux suites sont construites jusqu'au rang n, on définit alors a_{n+1} comme la partie entière de $10^{n+1}(x - x_n)$. Comme $0 \leq 10^{n+1}(x - x_n) < 10$, on a $0 \leq a_{n+1} \leq 9$ et on pose $x_{n+1} = x_n + a_{n+1} 10^{-(n+1)}$ et on a $0 \leq x - x_{n+1} < 10^{-n-1}$.

L'écriture décimale de x_n est $a_0, a_1 \cdots a_n$, il s'agit d'une version tronquée de l'écriture de x. De plus, on a $|x - x_n| \leq 10^{-n}$, autrement dit x_n est une approximation de x à 10^{-n} près et $x_n \to x$. On peut aussi écrire

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}.$$

On pourrait donc écrire

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k},$$

mais quel sens donner à une telle somme infinie ? C'est la théorie des séries qui répond à cette question.

4.1 Définition des séries et premières propriétés

Une série n'est pas un objet mathématique à proprement parler mais plutôt un problème que l'on pose. Plus précisément, on a la définition suivante.

Définition 4.1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. L'étude de la série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, consiste en l'étude de la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. S_n est appelée somme partielle d'ordre n.

Si la suite $(S_n)_n$ converge vers une limite finie, cette limite est appelée somme de la série et notée $\sum_{k=0}^\infty u_k$.

L'étude d'une série porte essentiellement sur l'étude de la convergence de la suite $(S_n)_n$ et sur l'éventuel calcul de sa limite.

Remarque. Si (u_n) et $(\tilde{u}_n)$ sont deux suites telles que $u_n = \tilde{u}_n$ pour $n \geq n_0$. Les sommes partielles associées S_n et $\widetilde{S}_n$ vérifient $S_n - \widetilde{S}_n = S_{n_0} - \widetilde{S}_{n_0}$ pour $n \geq n_0$. Ainsi étudier la convergence de S_n ou de $\widetilde{S}_n$ revient au même. On dit que la convergence de la série $\sum u_n$ ne dépend pas des premiers termes. En revanche, en cas de convergence de la série, la somme de la série dépend, elle, des premiers termes.

Si $\sum u_n$ est une série convergente, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^\infty u_k$, appelé le reste d'ordre n de la série. Cette série converge car ses derniers termes sont les mêmes que $\sum u_n$. On a alors

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k.$$

Remarque. Les outils développés pour l'étude des séries peuvent être utiles aussi pour l'étude des suites. Considérons $(u_n)_n$ une suite numérique et définissons $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n - u_{n-1}$ pour $n \geq 1$. La somme partielle de la série $\sum v_n$ d'ordre n est alors

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = u_0 + \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k-1}) = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n} u_{k-1} = u_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

Ainsi étudier la convergence de la suite (u_n) revient à étudier la convergence de la série $\sum v_n$.

Exemple. Un premier exemple important est celui des séries géométriques. Fixons $q \in \mathbb{C}$, considérons $u_n = q^n$ et étudions la série $\sum q^n$.

Dans ce cas, on peut calculer explicitement les sommes partielles, on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

si $q \neq 1$ et $S_n = n + 1$ si $q = 1$. Ainsi on peut conclure que

- Si $|q| < 1$, la série $\sum q^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^\infty q^k = \frac{1}{1-q}$.

- Si $|q| \geq 1$, la série $\sum q^n$ diverge.

Exemple. Étudions un autre exemple $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Pour étudier cette série nous utilisons l'égalité $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Ainsi nous pouvons exprimer les sommes partielles

$$
\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

Ainsi $\lim S_n = 1$ et la série converge et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

On a une propriété de linéarité sur les séries.

Proposition 4.1.2. *Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et $\lambda \in \mathbb{C}$. Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.*

Démonstration. Soit S_n et T_n les sommes partielles d'ordre n respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. La somme partielle d'ordre n de $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est $\lambda S_n + T_n$. Comme (S_n) et (T_n) convergent, $(\lambda S_n + T_n)$ converge vers $\lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. C'est le résultat attendu. $\square$

Remarque. Reprenons l'exemple $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. Aurait-on pu écrire

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \quad ?
$$

La réponse est NON car les séries qui apparaissent dans le terme de droite sont divergentes (on le verra ci-dessous). Il faut donc manipuler la linéarité avec soin pour les séries.

Remarque. Parfois, il peut être intéressant de montrer qu'une série diverge. Un critère simple dans ce cas est de montrer que le terme général u_n ne tend pas vers 0. En effet, si S_n désigne les sommes partielles, on peut écrire $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si la série converge S_n et S_{n-1} converge vers la même limite et donc u_n tend vers 0.

On peut donc retenir : si le terme général u_n ne tend pas vers 0, la série $\sum u_n$ diverge.

Un critère de convergence, assez théorique dans un premier temps, est le suivant

Proposition 4.1.3 (Critère de Cauchy)**.** *Une série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles est une suite de Cauchy ou encore si et seulement si*

$$
\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0, \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| \leq \varepsilon
$$

Démonstration. La série est convergente si et seulement si $(S_n)_n$ est convergente. Or $(S_n)_n$ est convergente si et seulement si $(S_n)_n$ est de Cauchy (Propositions 1.3.2 et 1.5.1). Quant à la réécriture, on a $S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} u_k$ pour $m > n$ donc

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m > n \geq n_0, |S_m - S_n| \leq \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m > n \geq n_0, \left| \sum_{k=n+1}^{m} u_k \right| \leq \varepsilon \\
&\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0 + 1, \left| \sum_{k=n}^{m} u_k \right| \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Exemple. Un cas où ce critère peut être utilisé directement est celui de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ (dans ce cas le terme général est $\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$). Si on fixe $N \in \mathbb{N}^*$, on peut estimer

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

Ainsi le critère de Cauchy n'est pas satisfait et donc la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge comme annoncé ci-dessus.

4.2 Séries de termes généraux positifs

Dans cette partie nous introduisons des outils pour étudier la convergence des séries de termes généraux positifs.

Tout d'abord nous pouvons remarquer que, si $(u_n)_n$ est une suite positive et $(S_n)_n$ est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$, alors la suite $(S_n)_n$ est croissante ($S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$). Ainsi $(S_n)_n$ converge soit vers une limite finie ℓ soit vers $+\infty$.

Proposition 4.2.1. *Soit (u_n) une suite positive. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout n, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$. Alors la série $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Soit S_n les sommes partielles de la série. Comme u_n est positive S_n est croissante et, par hypothèse, S_n est majorée ; donc la suite (S_n) converge : la série converge. □

4.2.1 Comparaison entre séries

Proposition 4.2.2. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives. On suppose que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Démonstration. On note $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les sommes partielles de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a $S_n \leq T_n$ pour tout n. Si $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ est finie, la suite (T_n) est majorée, donc la suite (S_n) est majorée et converge vers une limite finie : $\sum u_n$ converge. De plus

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim S_n \leq \lim T_n = \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

La seconde assertion est aussi vraie comme contraposée de la première. □

On a le corollaire

Corollaire 4.2.3. *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites positives. On suppose que* $u_n = O(v_n)$. *On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\sum u_n$ *diverge alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Exemple. Que dire de la série $\sum \frac{1}{n^2}$? On a $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ donc $\frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$ et on sait que la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Exemple. Que dire de $\sum n^2 q^n$ avec $q > 0$. Tout d'abord on note que si $q \geq 1$ le terme général $n^2 q^n$ diverge vers $+\infty$ donc la série diverge. Supposons maintenant que $q < 1$ et $q' \in]q, 1[$. Ainsi $\frac{q'}{q} > 1$ et donc $n^2 = O(\left(\frac{q'}{q}\right)^n)$ ou encore $n^2 q^n = O(q'^n)$. Comme $q' < 1$, $\sum q'^n$ converge donc $\sum n^2 q^n$ converge.

Dans certains cas, il peut être intéressant d'estimer les quantités apparaissant dans l'étude des séries.

Proposition 4.2.4. *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites positives. On suppose que* $u_n = o(v_n)$. *On a alors les deux assertions suivantes.*

- *Si* $\sum v_n$ *converge alors on peut comparer les restes des séries :*

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right).$$

- *Si* $\sum v_n$ *diverge alors on peut comparer les sommes partielles des séries :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

Démonstration. Pour le premier cas, notons que, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ est convergente. Fixons $\varepsilon > 0$. Comme $u_n = o(v_n)$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a $u_n \leq \varepsilon v_n$. Ainsi on a, pour $n \geq n_0$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

Ceci signifie exactement $\sum_{k=n}^{\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right)$.

Pour le second cas, notons $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ les sommes partielles respectives de $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On a $\lim T_n = +\infty$. Fixons ε et n_0 comme ci-dessus. Comme $T_n \to +\infty$, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $S_{n_0} \leq \varepsilon T_n$. Pour $n \geq n_1$, on a donc

$$S_n = S_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq \varepsilon T_n + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k \leq 2\varepsilon T_n$$

Ceci signifie exactement $S_n = o(T_n)$. □

4.2.2 Comparaison série-intégrale

Les résultats de la partie précédente sont très similaires à ceux de la Section 3.2. En fait il y a un lien fort entre la théorie des séries et celle des intégrales impropres. Le résultat ci-dessous est un résultat dans ce sens.

Proposition 4.2.5. *Soit $f \in C^0_{pm}(\mathbb{R}_+)$ une fonction décroissante et positive. Les deux propriétés ci-dessous sont alors équivalentes*

(i) $\sum f(n)$ *est convergente.*

(ii) $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*

Le résultat reste vrai si f n'est définie que sur $[a, +\infty[$ et on retire les premiers termes de la série.

Démonstration. Comme f est décroissante, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

En sommant ces inégalités on obtient

$$\int_1^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_0^{n} f(t)dt$$

Si (i) est vraie, le terme du milieu est borné donc celui de gauche aussi et donc l'intégrale converge, (ii) est vraie. Si (ii) est vraie, le terme de droite est borné donc celui du milieu aussi et la série converge, (i) est vraie. □

Exemple. Un exemple important d'application est celui des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ vérifie les hypothèses de la proposition ci-dessus pour $\alpha \geq 0$. Ainsi d'après les résultats concernant les intégrales de Riemann on a

- la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Un second exemple intéressant concerne les séries de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ ($\alpha \geq 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$). Tout d'abord si $\alpha > 0$, on note $f(x) = \frac{1}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ et on calcule

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta} - \frac{\beta}{x^{\alpha+1}(\ln x)^{\beta+1}} = (-\alpha - \frac{\beta}{\ln x})\frac{1}{x^{\alpha+1}(\ln x)^\beta}$$

Ainsi $f'(x) < 0$ pour x grand ($\alpha > 0$) et f est donc décroissante à partir d'une certaine valeur de x. De plus $\lim_{+\infty} f = 0$. On peut donc appliquer la proposition et utiliser les résultats concernant les intégrales de Bertrand du chapitre précédent. La série converge dès que $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$. Si $\alpha = 0$ on note que $\frac{1}{n} = o(\frac{1}{\ln^\beta n})$ donc la série $\sum \frac{1}{\ln^\beta n}$ diverge.

- la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

On peut même préciser certains comportements asymptotiques.

Proposition 4.2.6. *Soit $f \in C^0_{pm}(\mathbb{R}_+)$ une fonction décroissante, positive et telle que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. Alors*

$$\int_0^n f(t)dt \sim \sum_{k=0}^n f(k)$$

Démonstration. Notons tout d'abord que comme f est décroissante, on a $0 \leq f(t) \leq f(0)$. Ainsi $\int_1^{n+1} f(t)dt = \int_0^n f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt$ et $|-\int_0^1 f(t)dt + \int_n^{n+1} f(t)dt| \leq 2f(0) = o(\int_0^n f(t)dt)$. Ainsi en reprenant une inégalité de la démonstration précédente on obtient

$$\int_0^n f(t)dt + o(\int_0^n f(t)dt) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t)dt$$

Ceci donne $\sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_0^n f(t)dt$. L'ajout du terme $f(0)$ ne modifie par l'équivalent puisque la série diverge. □

Exemple. Reprenons l'exemple $\sum \frac{1}{k}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ vérifie les hypothèses de la proposition donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \int_1^n \frac{1}{t}dt = \ln n$$

On peut même être plus précis sur cet équivalent. Posons $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ et considérons $a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln n + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})$.

Ainsi la série $\sum(a_n - a_{n-1})$ converge. Ainsi (a_n) converge vers une limite finie γ. On peut donc écrire $a_n = \gamma + o(1)$ ou encore

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Le nombre γ est appelé constante d'Euler.

4.2.3 Règles de D'Alembert et de Cauchy

On va maintenant donner deux outils pour étudier la convergence d'une série à termes positifs.

Proposition 4.2.7 (Règle de D'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Considérons $\ell' = \frac{1}{2}(1+\ell) < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell < \ell'$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell' = \frac{\ell'^{n+1}}{\ell'^n}$ à partir d'un certain rang. Donc d'après la Proposition 1.2.3, on a $u_n = O(\ell'^n)$. Comme $\sum \ell'^n$ est une série convergente ($\ell' < 1$), $\sum u_n$ est convergente. □

Remarque. Notons que si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1$, la série diverge car $u_n \not\to 0$.

Exemple. La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente. En effet, en posant $u_n = \frac{1}{n!}$, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \to 0$.

Le second outil est le suivant.

Proposition 4.2.8 (Règle de Cauchy)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

- *Si $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$, alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.*

Démonstration. Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $\limsup \sqrt[n]{u_n} < q < 1$. Il existe alors n_0 tel que $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ pour $n \geq n_0$ ou encore $u_n \leq q^n$. Ainsi $u_n = O(q^n)$ et donc $\sum u_n$ converge.

Si $\limsup \sqrt[n]{u_n} = \ell > 1$, il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_n$ telle que $\sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)}} \to \ell$. Ainsi $\sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)}} \geq 1$ à partir d'un certain rang et de même pour $u_{\varphi(n)}$. La suite (u_n) ne tend donc pas vers 0 et la série diverge. □

Exemple. La série $\sum(1-\frac{1}{n})^{n^2}$ est convergente. En effet $\sqrt[n]{(1-\frac{1}{n})^{n^2}} = (1-\frac{1}{n})^n \to e^{-1} < 1$.

4.3 Séries à termes généraux de signe quelconque

4.3.1 Convergence absolue

Définition 4.3.1. Soit $\sum u_n$ une série (réelle ou complexe). On dit que cette série converge absolument si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 4.3.2. *Soit $\sum u_n$ une série. Si la série est absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente. De plus, dans ce cas, on a*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$$

Démonstration. On a l'inégalité classique suivante

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |u_k|$$

Comme la série est absolument convergente, le critère de Cauchy nous dit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0, \sum_{k=n}^{m} |u_k| \leq \varepsilon$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall m \geq n \geq n_0, \left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| \leq \varepsilon$$

Le critère de Cauchy est donc satisfait pour la série $\sum u_n$ et donc la série converge d'après le Proposition 4.1.3. En considérant l'inégalité pour $n = 0$ et en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|$$

□

Le passage à la valeur absolue permet d'utiliser les règles de comparaison associées aux o et O. Elle permet aussi de comparer des sommes de suites équivalentes.

Corollaire 4.3.3. *Soit u_n et v_n deux suites. On suppose que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum v_n$ converge absolument. De plus si (v_n) est positive, on a les deux assertions suivantes.*

- *Si $\sum v_n$ converge alors*

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k.$$

- *Si* $\sum v_n$ *diverge alors*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Démonstration. Tout d'abord si $u_n \sim v_n$ on a $|u_n| \sim |v_n|$ ce qui donne l'équivalence des convergences absolues. Ensuite si (v_n) est positive, on utilise la Proposition 4.2.4 en écrivant $u_n = v_n + w_n$ avec $w_n = o(v_n)$. Ainsi, pour le premier cas, comme $w_n = o(v_n)$ la série $\sum w_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{k=n}^{\infty} u_k = \sum_{k=n}^{\infty} v_k + \sum_{k=n}^{\infty} w_k = \sum_{k=n}^{\infty} v_k + o\left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k\right).$$

Le calcul ci-dessus donne exactement $\sum_{k=n}^{\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} v_k$.

Pour le second cas, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} v_k + o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$$

car $|\sum_{k=0}^{n} w_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |w_k| = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$. Ceci donne le résultat attendu. □

4.3.2 Règle d'Abel et séries alternées

Dans certains cas, l'étude de la convergence absolue n'est pas suffisante, on peut alors utiliser le résultat suivant.

Proposition 4.3.4 (Règle d'Abel)**.** *Soit* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites vérifiant les propriétés suivantes*

- *la suite* $(u_n)_n$ *est réelle, décroissante et tend vers* 0 *et*
- *les sommes partielles* $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$ *forment une suite bornée.*

Alors la série $\sum u_n v_n$ *est convergente.*

Démonstration. On va calculer une expression des sommes partielles de la série. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k v_k &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k (T_k - T_{k-1}) \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k T_k - \sum_{k=1}^{n} u_k T_{k-1} \\ &= u_0 v_0 + \sum_{k=1}^{n} u_k T_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} T_k \\ &= u_0 v_0 + u_n T_n - u_1 T_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) T_k \\ &= u_n T_n + \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) T_k\end{aligned}$$

D'après les hypothèses, (T_n) bornée et $u_n \to 0$, on a $u_n T_n \to 0$. Ainsi on voit que la convergence de la série $\sum u_n v_n$ est équivalente à la convergence de la série $\sum (u_n - u_{n+1}) T_n$. Montrons que cette seconde série est absolument convergente. Pour cela choisissons M tel que $|T_n| \leq M$ pour tout n et notons que $u_n - u_{n+1}$ est positif. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} |(u_k - u_{k+1}) T_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1}) |T_k| \leq \sum_{k=0}^{n} (u_k - u_{k+1}) M \leq M(u_0 - u_{n+1}) \leq M u_0$$

Ainsi la série est absolument convergente et $\sum u_n v_n$ est convergente. □

Il y a un cas très important où ce résultat s'applique.

Corollaire 4.3.5 (Critère spécial des séries alternées)**.** *Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n \to 0$. Alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.*

De plus, si $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n de la série, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leq u_{n+1}$

Démonstration. La convergence de la série se déduit de la règle d'Abel en posant $v_n = (-1)^n$. Les sommes partielles valent alors toutes 1 ou 0 et forment donc une suite bornée.

Le résultat sur le reste découle d'une autre preuve de la convergence de la série. Pour cela notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ les sommes partielles. On a alors $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2(n+1)} u_{2(n+1)} + (-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \leq 0$ et $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = (-1)^{2(n+1)+1} u_{2(n+1)+1} + (-1)^{2(n+1)} u_{2(n+1)} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \geq 0$. Ainsi la suite $(S_{2n})_n$ est décroissante et $(S_{2n+1})_n$ est croissante. De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = u_{2n+1} \to 0$. Ainsi les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes, elles converge donc vers la même limite ℓ. Ceci redémontre que la série converge vers ℓ et de plus, pour tout n, $S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$. Donc $R_{2n} = \ell - S_{2n} \leq 0$ et $R_{2n+1} = \ell - S_{2n+1} \geq 0$, ce qui donne le résultat concernant le signe. De plus $|R_{2n}| = |\ell - S_{2n}| = S_{2n} - \ell \leq S_{2n} - S_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $|R_{2n+1}| = |\ell - S_{2n+1}| = \ell - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}$. □

Exemple. Considérons les séries alternées $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$. La suite $(\frac{1}{n^\alpha})$ est bien décroissante et tend vers 0 donc le critère des séries alternées s'applique et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

On savait déjà qu'elle convergeait pour $\alpha > 1$ car, dans ce cas, la série est absolument convergente. Par contre pour $\alpha \leq 1$, elle n'est pas absolument convergente.

Nous pouvons même aller plus loin pour $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. Pour cela rappelons que nous avons établi $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{p=1}^{n} \frac{-1}{2p-1} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} &= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + 2\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p} \\
&= -\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \\
&= -\ln(2n) - \gamma + \ln n + \gamma + o(1) \\
&= -\ln 2 + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

Exemple. Que dire de la convergence de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$? Tout d'abord notons que $\left|\frac{e^{in\theta}}{n}\right| = \frac{1}{n}$. Ainsi la série n'est pas absolument convergente. De plus, pour $\theta = 0[2\pi]$, on a $\frac{e^{in\theta}}{n} = \frac{1}{n}$ donc la série est divergente. Supposons maintenant $\theta \neq 0[2\pi]$. Calculons alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} (e^{i\theta})^k = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \frac{e^{-i(n+1)\theta/2} - e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}} \\
&= e^{in\theta/2} \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}
\end{aligned}$$

Ainsi $|\sum_{k=0}^n e^{ik\theta}| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}$ (notons que $\theta \neq 0[2\pi]$ implique que $\sin(\theta/2) \neq 0$). Ainsi la règle d'Abel s'applique et $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

4.4 Retour sur l'écriture décimale

Dans l'introduction, nous avons posé la question de l'écriture suivante

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$$

où $a_0 = 0$ et $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ pour $k \geq 1$. Nous allons pouvoir maintenant répondre aux questions que nous avons soulevées.

La première remarque que nous pouvons faire est que la suite $a_k 10^{-k} = O(10^{-k})$ puisque $a_k \leq 9$. Ainsi la série $\sum a_k 10^{-k}$ est convergente (par comparaison avec les séries géométriques) et le nombre $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ est bien défini. La question qui reste est de savoir qu'elle est son écriture décimale : a-t-on $x = a_0, a_1a_2a_3\ldots$?

Pour cela commençons par un petit calul. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} 9 \times 10^{-k} = \frac{9}{10}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{10}{9} = 1$$

Ainsi le nombre $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \times 10^{-k}$ vaut 1 ; il a donc pour écriture décimale 1 et non $0,99999\ldots$ (parfois on voit écrit $1 = 0,999999\ldots$). D'une manière générale, nous dirons que la suite $(a_n)_n$ est ultimement égale à 9 si il existe $k_0 \in N$ tel que $a_k = 9$ pour tout $k \geq k_0$.

D'après l'introduction si x a pour écriture décimale $a_0, a_1a_2a_3\ldots$ et $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k}$ on a $|x - x_n| \leq 10^{-n}$ donc on obtient bien $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ par passage à la limite.

Considérons donc maintenant $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k}$ avec $a_0 = 0$ et $a_k \in \{0, \ldots, 9\}$ pour $k \geq 1$. Supposons que $(a_k)_k$ n'est pas ultimement égale à 9. Alors pour tout n on a $0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k 10^{-k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} 9 \times 10^{-k} = 10^{-n}\sum_{k=1}^{\infty} 9 \times 10^{-k} = 10^{-n}$. Ainsi $x = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^{-k} + r$ où $0 \leq r < 10^{-n}$. Ainsi si l'algorithme d'écriture décimale donne $x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k 10^{-k}$. On a $10^n(x - x_{n-1}) = a_n + 10^n r$. Comme $0 \leq 10^n r < 1$, la n-ième décimale est bien la partie entière de $a_n + 10^n r$ c'est-à-dire a_n. Donc l'écriture décimale de x est bien $a_0, a_1a_2a_3\ldots$.

Supposons maintenant que $(a_k)_k$ est ultimement égale à 9. Considérons alors $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a_k = 9$ pour tout $k > k_0$ et $a_{k_0} < 9$. Définissons alors la suite $(b_k)_k$ par $b_k = a_k$ pour $k < k_0$, $b_{k_0} = a_{k_0} + 1$ et $b_k = 0$ pour $k > k_0$. Notons que la suite ainsi définie vérifie $b_0 \in \mathbb{N}$ et $b_k \in \{0, \ldots, 9\}$ pour $k \geq 1$ et qu'elle n'est pas ultimement égale à 9. De plus on a

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 10^{-k} = \sum_{k=0}^{k_0} a_k 10^{-k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 9 \times 10^{-k} = \sum_{k=0}^{k_0} a_k 10^{-k} + 10^{-k_0} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k 10^{-k}.$$

D'après ce que l'on a vu ci-dessus, l'écriture décimale de x est alors $b_0, b_1 \ldots b_{k_0}$.

4.5 Quelques compléments autour des séries numériques

4.5.1 Le produit de Cauchy

Supposons que l'on a deux séries convergentes $\sum a_n$ et $\sum b_n$ et notons A et B leurs sommes respectives. On se pose alors la question de savoir si l'on peut écrire le produit AB comme la somme d'une série $\sum c_n$ où le terme général c_n est lié aux termes généraux a_n et b_n. Pour répondre à cette question introduisons une notions de produit dans l'espace des suites.

Définition 4.5.1. Soit $(a_n)_n$ et (b_n) deux suites. On définit alors une suite (c_n) par la formule suivante

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

La suite $(c_n)_n$ est appelée produit de Cauchy des suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et sera notée $((a * b)_n)_n$ dans ce cours.

La loi $*$ définit un produit sur l'espace des suites $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui est commutatif, associatif et distributif par rapport à la loi $+$. Son élément neutre est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 1$ et $u_n = 0$ pour $n \geq 1$.

On a alors le résultat suivant qui répond à la question posée ci-dessus.

Proposition 4.5.2. *Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général le produit de Cauchy de (a_n) et (b_n) est absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a * b)_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right)$$

Démonstration. Notons $(c_n)_n$ le produit de Cauchy $((a * b)_n)_n$. Notons A_n, B_n et C_n les sommes partielles respectives des séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$. Considérons tout d'abord le cas où les termes généraux sont positifs.

On a alors

$$\begin{aligned} A_n \times B_n = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) &= \sum_{i,j=0}^{n} a_i b_j \\ &= \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \leq n}}^{n} a_i b_j + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq n+1}}^{n} a_i b_j \\ &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq n+1}}^{n} a_i b_j \\ &= C_n + \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq n+1}}^{n} a_i b_j \geq C_n \end{aligned} \tag{4.1}$$

Notons que dans le second terme de droite on a toujours $i + j \leq 2n$. Ceci donne

$$A_n \times B_n \leq \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = C_{2n}$$

Ainsi on a $C_n \leq A_n \times B_n \leq C_{2n}$. On suppose les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergentes, donc les suites (A_n) et (B_n) sont majorées et donc la suite (C_n) est majorée : la série

$\sum c_n$ est convergente. De plus, par passage à la limite dans l'inégalité, on a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \leq (\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \times (\sum_{n=0}^{\infty} b_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ce qui donne l'égalité annoncée.

Pour le cas général, remarquons tout d'abord que $|c_n| = |(a*b)_n| \leq (|a|*|b|)_n$. Donc si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergente $(|c_n|)_n$ est majorée par une suite dont la série associée est convergente : $\sum c_n$ est absolument convergente.

Pour montrer l'égalité annoncée, on reprend le caclul (4.1). On note alors $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_n$ les sommes partielles des séries $\sum |a_n|$, $\sum |b_n|$ et $\sum (|a| * |b|)_n$. On a alors

$$|A_n B_n - C_n| = \left| \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq n+1}}^{n} a_i b_j \right| \leq \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j \geq n+1}}^{n} |a_i||b_j| = |\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n - \mathbf{C}_n|$$

Le cas des suites positives montre que le terme de droite tend vers 0, donc celui de gauche aussi ce qui donne la formule. □

Exemple. Considérons la série géométrique $\sum z^n$ pour $|z| < 1$. On sait que la série converge absolument et $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$. Ainsi d'après le résultat ci-dessus

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} z^k z^{m-k} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{m} 1 \right) z^m = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) z^m$$

4.5.2 L'exponentielle complexe

Nous allons tout d'abord montrer que l'exponentielle réelle $\exp(x)$ peut s'écrire comme la somme d'une série particulière. Nous introduirons ensuite la notion d'exponentielle d'un nombre complexe et ainsi donner une justification à la notation polaire des nombres complexes.

Commençons par l'écriture de $\exp(x)$.

Proposition 4.5.3. *Soit $x \in \mathbb{R}$ une nombre réel, on a alors*

$$\exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Démonstration. On va utiliser la formule de Taylor avec reste intégrale (Proposition 2.4.5). Comme exp est C^∞, on peut l'appliquer à tout ordre avec $a = 0$ ainsi on a

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n dt$$

On peut alors majorer le reste

$$\left| \int_0^x \frac{e^t}{n!} (x-t)^n dt \right| \leq \frac{\max(1, e^x)}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n dt \right| = \frac{\max(1, e^x)}{n!} \left| \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x \right|$$
$$= \frac{\max(1, e^x) |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ce majorant tend vers 0 lorsque $n \to \infty$, donc le reste tend vers 0 et la formule est démontrée. □

Ce résultat incite à poser la définition suivante.

Définition 4.5.4. Soit z un nombre complexe, on appelle exponentielle de z, notée $\exp z$ ou e^z, le nombre complexe défini par

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Remarquons que, pour que la définition ait du sens, il faut vérifier que la série ci-dessus converge. Pour cela appliquons la règle de D'Alembert pour montrer son absolue convergence :

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$

Voici quelques propriétés de l'exponentielle complexe

Proposition 4.5.5. *Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z+z') = \exp z \times \exp z'$. On a $\exp 0 = 1$*
Si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a $|\exp z| = \exp a$. De plus $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$.

Démonstration. La première formule est une conséquence de la Proposition 4.5.2. Pour cela calculons le produit de cauchy des suites $(\frac{z^n}{n!})_n$ et $(\frac{z'^n}{n!})_n$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!}(z+z')^n$$

$\exp 0 = 1$ s'obtient en posant $z = 0$ dans la formule.

On a

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!}$$

Donc par passage à la limite, on obtient $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$ (on utilise la continuité de l'application $z \mapsto \bar{z}$). Finalement

$$|\exp z|^2 = \exp z \times \overline{\exp z} = \exp z \times \exp \bar{z} = \exp(z + \bar{z}) = \exp(2a) = (\exp a)^2$$

Donc $|\exp z| = \exp a$ puisque $\exp a > 0$. □

Ainsi si $z = a + ib$, on a $\exp(z) = e^a e^{ib}$ où e^a est le module de $\exp(z)$. Ainsi montrer que tout nombre complexe non nul peut être mis sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta} = \exp(\ln \rho + i\theta)$ revient à montrer que l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective. La réponse à cette question nécessite des outils qui dépassent le contenu de ce cours.

On peut compléter la définition de l'exponentielle complexe par celle des fonctions cosinus et sinus.

Définition 4.5.6. Soit z un nombre complexe, on définit alors les nombres $\cos z$ et $\sin z$ par

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Vérifions que le développement en série est correct.

$$\begin{aligned}
\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(iz)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-iz)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2p+1}}{(2p+1)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-iz)^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{i(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-i(-1)^p z^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!}
\end{aligned}$$

4.5.3 Les produits infinis

L'étude des séries consiste en l'étude des sommes infinies. Lorsque l'on se donne une suite réelle $(a_n)_n$, on peut aussi considérer le produit de tous ses termes $\prod_{n=0}^{\infty} a_n$. L'étude de tels produits repose évidemment sur l'étude de la convergence de la suite des produits partiels $\prod_{k=0}^{n} a_k$.

Notons que si l'un des termes a_n est nul, la suite des produits partiels est nulle à partir d'un certain rang et donc elle converge vers 0. Supposons donc que $a_n \neq 0$ pour tout n et que $\prod_{k=0}^{n} a_k$ converge vers une limite ℓ non nulle. On a alors

$$a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n} a_k}{\prod_{k=0}^{n-1} a_k} \to \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Ainsi a_n est strictement positif à partir d'un certain rang. Ceci explique pourquoi on se consacre essentiellement à l'étude de produits infinis à termes strictement positifs que l'on écrit souvent sous la forme $a_n = 1 + b_n$ pour mettre en évidence la convergence de (a_n) vers 1.

Une fois ces remarques et ces restrictions faites, on peut aussi noter que

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = \exp(\ln(\prod_{k=0}^{n} a_k)) = \exp(\sum_{k=0}^{n} \ln a_k)$$

Ainsi la convergence de la suite des produits partiels est directement reliée à l'étude de la série $\sum \ln a_n$ pour laquelle on dispose de tous les outils développés précédemment.

Exemple. Étudions par exemple le produit $\prod(1-\frac{1}{n^\alpha})$ $\alpha > 0$ (avec $n \geq 2$ pour que tous les termes soit bien définis et non nuls).

On sait que l'étude de ce produit passe par celle de la série $\sum \ln(1-\frac{1}{n^\alpha})$. On a $\ln(1-\frac{1}{n^\alpha}) \sim -\frac{1}{n^\alpha}$. Ainsi si $\alpha > 1$ la série converge et les produits partiels convergent vers une limite non nulle. Si $\alpha \leq 1$, les sommes partielles $\sum_{k=2}^{n} \ln(1-\frac{1}{k^\alpha})$ tendent vers $-\infty$ et donc les produits partiels tendent vers 0.

4.5.4 Les séries doubles

L'étude des séries porte sur les sommes de familles de nombres $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicées par $\mathbb{N}$. On pourrait aussi s'intéresser à des familles indicées, par exemple, par $\mathbb{N}^2$: $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$. En toute généralité cette étude relève de la théorie des familles sommables que nous ne développerons pas ici. Nous allons juste donner un résultat concernant les familles $(a_{i,j})_{i,j}$ à termes positifs.

Théorème 4.5.7 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ une famille à termes positifs. On note alors les sommes de séries*

$$S_i^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \quad \text{et} \quad S_j^1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$$

avec la convention que ces sommes valent $+\infty$ si les séries divergent.

On suppose alors que les sommes S_i^2 sont toutes finies et que $\sum S_i^2$ converge. Alors les S_j^1 sont toutes finies et $\sum S_j^1$ converge, de plus on a

$$\sum_{i=0}^{\infty} S_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} S_j^1$$

Sous les hypothèses du théorème, le nombre $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}$ est appelé somme de la série double $\sum a_{i,j}$.

Démonstration. Notons $S_j^1(n)$ les sommes partielles $\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$. On a alors

$$\sum_{j=0}^{p} S_j^1(n) = \sum_{j=0}^{p}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{p} a_{i,j} \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$$

Il découle de cette inégalité que $S_j^1(n) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ donc la série $\sum_i a_{i,j}$ converge. De plus en laissant tendre n vers ∞ dans l'inégalité, on obtient

$$\sum_{j=0}^{p} S_j^1 \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$$

Cette majoration étant uniforme en p, la série $\sum S_j^1$ converge et

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$$

La situation étant symétrique en i et j, l'autre inégalité est aussi vraie ce qui donne l'égalité. $\square$

Exemple. Étudions la série double $\sum \frac{1}{(i+j)^3}$. Pour cela fixons i et remarquons que $\frac{1}{(i+j)^3} \sim \frac{1}{j^3}$. Ainsi pour chaque i fixé la somme $S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3}$ est finie. Maintenant a-t-on $\sum S_i$ converge. Pour cela il faut estimer S_i. On note que $S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3} = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$. Ainsi S_i est juste le i-ème reste de la série $\sum \frac{1}{k^3}$. Ainsi par comparaison avec des intégrales (voir Section 4.2.2), on a

$$S_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \leq \int_i^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{2}\frac{1}{i^2}$$

Ainsi la série $\sum S_i$ converge et la somme double $\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{1}{(i+j)^3}$ est bien définie.

4.5.5 La formule de Stirling

Nous allons donner ici une preuve de l'équivalent de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

La première étape consiste à montrer qu'il existe une constante $\ell > 0$ telle que $\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \to \ell$. On pose $u_n = \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$ et $u_0 = 1$.

Pour montrer que u_n admet une limite on écrit

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}}$$

On s'intéresse donc a la convergence du produit infini de terme général $\frac{u_n}{u_{n-1}}$. On est donc amené à étudier la convergence de la série $\sum \ln \frac{u_n}{u_{n-1}}$. On a

$$\begin{aligned}
\ln \frac{u_n}{u_{n-1}} = \ln\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \frac{(n-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{-n+1}}{(n-1)!}\right) &= \ln(e(1-\frac{1}{n})^{n-\frac{1}{2}}) \\
&= 1 + (n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n}) \\
&= 1 + (n-\frac{1}{2})\big(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})\big) \\
&= 1 - 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}) = O(\frac{1}{n^2})
\end{aligned}$$

Donc la série est convergente (comparaison avec une série de Riemann) et la constante ℓ existe bien.

Il reste donc à déterminer la valeur de ℓ pour obtenir l'équivalent. Pour cela on va se servir du calcul des intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$. D'après l'équivalent que l'on a trouver pour $n!$ et (2.2) on a :

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \sim \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}\ell}{2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}\ell^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{n}\ell 2} = \frac{\pi}{\ell\sqrt{2n}}$$

et

$$W_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \sim \frac{2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}\ell^2}{(2n+1)^{2n+\frac{3}{2}}e^{-(2n+1)}\ell} = \frac{e\ell}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}(1+\frac{1}{2n})^{2n+\frac{3}{2}}}$$

On a

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{2n})^{2n+\frac{3}{2}} = \exp\left((2n+\frac{3}{2})\ln(1+\frac{1}{2n})\right) &= \exp\left((2n+\frac{3}{2})(\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{2n}))\right) \\ &= \exp(1+o(1))\end{aligned}$$

Ceci donne finalement $W_{2n+1} \sim \frac{\ell}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$. Par ailleurs, comme $0 \leq \sin t \leq 1$, on a $W_{2n} \geq W_{2n+1} \geq W_{2n+2}$ et $\frac{W_{2n}}{W_{2n+2}} = \frac{2n+2}{2n+1} \to 1$. De cette limite, on a $W_{2n+2} \sim W_{2n}$ et, de l'encadrement, on obtient $W_{2n+1} \sim W_{2n}$. Ceci nous donne finalement

$$\frac{\pi}{\ell\sqrt{2n}} \sim \frac{\ell}{2^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$$

et donc $\ell^2 = 2\pi$ ou encore $\ell = \sqrt{2\pi}$. La formule de Stirling est donc démontrée.

4.5.6 Quelques calculs explicites

- Nous allons montrer le résultat suivant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Notons tout d'abord que cette série est une série alternée dont la valeur absolue du terme général est décroissante et tend vers 0. Le critère des séries alternées affirme donc que la série converge. Nous allons le remontrer en déterminant la valeur de la somme.

Fixons $N \in \mathbb{N}$ et calculons $\sum_{n=0}^{N}(-x^2)^n = \frac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$. Ainsi pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\arctan t = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}dx &= \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{N}(-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}\right)dx \\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^t \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}dx\end{aligned}$$

L'intégrale de droite peut être estimée

$$\left|\int_0^t \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}dx\right| \leq \int_0^{|t|} x^{2N+2}dx = \frac{|t|^{2N+3}}{2N+3}$$

Ainsi, si $|t| \leq 1$, l'intégrale tend vers 0 lorsque $N \to \infty$. Ceci nous donne que pour $t \in [-1, 1]$:

$$\arctan t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}$$

et pour $t = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

- Nous allons établir le résultat suivant

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour cela nous allons d'abord établir que, pour $N \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_N de degré N tel que

$$\frac{\sin(2N+1)x}{\sin^{2N+1} x} = P_N(\cot^2 x) \tag{4.2}$$

On cherche donc à évaluer $\sin(2N+1)x$:

$$\begin{aligned}
\sin(2N+1)x = \mathrm{Im}(\exp(i(2N+1)x)) &= \mathrm{Im}(\exp(ix)^{2N+1}) \\
&= \mathrm{Im}\left((\cos x + i \sin x)^{2N+1}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2N+1} \binom{2N+1}{k} \cos^k x (i \sin x)^{2N+1-k}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{N} \binom{2N+1}{2p} (-1)^{N-p} \cos^{2p} x \sin^{2N+1-2p} x \\
&= \sin^{2N+1} x \left(\sum_{p=0}^{N} (-1)^{N-p} \binom{2N+1}{2p} \cot^{2p} x\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $P_N = \sum_{p=0}^{N} (-1)^{N-p} \binom{2N+1}{2p} X^p$ convient. Notons que les termes de plus haut degré de P_N sont $P_N = (2N+1)X^N - \frac{N(2N+1)(2N-1)}{3} X^{N-1} + \cdots$.

En considérant $x = \frac{n}{2N+1}\pi$ avec $1 \leq n \leq N$ dans (4.2), on obtient

$$P_N\big(\cot^2(\frac{n\pi}{2N+1})\big) = \frac{\sin(n\pi)}{\sin^{2N+1} \frac{n\pi}{2N+1}} = 0$$

Comme la fonction cot est strictement décroissante sur $]0,\pi[$, les nombres $\cot^2(\frac{n\pi}{2N+1})$ $(1 \leq n \leq N)$ sont N racines distinctes de P_N qui est de degré N. Ainsi on a

$$P_N = (2N+1)\prod_{n=1}^{N}\big(X - \cot^2(\frac{n\pi}{2N+1})\big)$$

En regardant le coefficient devant X^{N-1} on obtient

$$-\frac{N(2N+1)(2N-1)}{3} = -(2N+1)\sum_{n=1}^{N}\cot^2(\frac{n\pi}{2N+1})$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{N}\cot^2(\frac{n\pi}{2N+1}) = \frac{N(2N-1)}{3} \tag{4.3}$$

Une fois cette formule établie nous allons pouvoir calculer la somme de la série harmonique. Tout d'abord notons que, pour $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\cos(x) \leq 1 \leq \frac{1}{\cos^2 x}$. En intégrant ces inégalités, on obtient $\sin x \leq x \leq \tan x$ ou encore $\cot x \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin x}$ pour $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$. Finalement nous avons l'inégalité $\cot^2 x \leq \frac{1}{x^2} \leq 1 + \cot^2 x$. Ainsi en évaluant ces inégalités en $x = \frac{n\pi}{2N+1}$ et en sommant pour $1 \leq n \leq N$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\cot^2(\frac{n\pi}{2N+1}) \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{(2N+1)^2}{n^2\pi^2} \leq \sum_{n=1}^{N}1 + \cot^2(\frac{n\pi}{2N+1})$$

En utilisant (4.3), on a

$$\frac{1}{(2N+1)^2}\frac{N(2N-1)}{3} \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2\pi^2} \leq \frac{1}{(2N+1)^2}\Big(N + \frac{N(2N-1)}{3}\Big)$$

Ainsi en faisant tendre N vers ∞, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{6}$$

ce qui est le résultat attendu.

4.5.7 Les séries entières

Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_n$ est une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. L'étude générale des séries entières est faite dans le cours *Analyse 4* du second semestre de L2.

Comme toute série, la première question à résoudre est celle de la convergence de la série.

Proposition 4.5.8. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $r \in \mathbb{R}_+$ tel que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Démonstration. Comme $(a_n r^n)$ est bornée, on peut écrire $a_n r^n = O(1)$. Ainsi $|a_n z^n| = |a_n r^n| (\frac{|z|}{r})^n = O(\left(\frac{|z|}{r}\right)^n)$. Comme $\frac{|z|}{r} < 1$, la série $\sum (\frac{|z|}{r})^n$ converge et donc $\sum a_n z^n$ converge absolument. □

On définit alors

Définition 4.5.9. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On définit alors le rayon de convergence de la série par $R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$.

Notons que $S = \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ n'est pas vide puisque $0 \in S$ et que le rayon de convergence peut être égal à $+\infty$. Notons aussi que si $r \in S$, alors $r' \in S$ pour tout $r' \in [0, r]$. La convergence d'une série entière est donnée par le résultat suivant.

Proposition 4.5.10. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors :*

- *si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge,*
- *si $|z| > R$, $\sum a_n z^n$ diverge.*

Démonstration. Si $|z| < R$, il existe alors $r_0 \in \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ tel que $|z| < r_0 \leq R$. Ainsi $\sum a_n z^n$ converge absolument d'après la Proposition 4.5.8. Si $|z| > R$, alors $|z| \notin \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$. Donc $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0 et donc $\sum a_n z^n$ diverge. □

Remarque. Ce résultat justifie la terminologie de rayon de convergence pour R. Le disque $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ est d'ailleurs appelé disque de convergence de la série entière. Le résultat ne dit toutefois rien sur le comportement de la série lorsque $|z| = R$. Il s'agit en général d'une question plus délicate qui ne connaît pas de réponse générale.

Exemple. Considérons la série entière $\sum \frac{1}{n} z^n$. La suite $(\frac{1}{n})_n$ est bornée donc le rayon de convergence est supérieure à 1. Par ailleurs si $r > 1$ on a $\frac{r^n}{n} \to +\infty$ donc le rayon de convergence est inférieur à 1 : le rayon de convergence est 1.

Que peut-on dire si $|z| = 1$? Pour $z = 1$, $\sum \frac{1}{n}$ diverge. Pour $z = -1$, $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge. On voit qu'il n'y a pas de comportement unique sur le bord du disque de convergence. En fait si $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0[2\pi]$, on a $\sum \frac{1}{n} e^{in\theta}$ converge comme on l'a vu dans un exemple précédent.

Afin de déterminer le rayon de convergence d'une série entière on peut recycler des critères que l'on a vu pour étudier la convergence des séries numériques.

Proposition 4.5.11 (Règle de D'Alembert). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ pour n assez grand. On suppose que $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to \ell$ (éventuellement $\ell = +\infty$). Le rayon de convergence R de la série entière est alors $R = \frac{1}{\ell}$ (avec $R = 0$ si $\ell = +\infty$ et $R = +\infty$ si $\ell = 0$).*

Démonstration. On reprend pour cela la règle de D'Alembert pour les séries numériques. Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to |z|\ell$. Ainsi on sait que si $|z|\ell < 1$ la série converge et si $|z|\ell > 1$ la série diverge. Autrement dit, si $|z| < \frac{1}{\ell}$ la série converge et si $|z| > \frac{1}{\ell}$ la série diverge. Donc $R = \frac{1}{\ell}$. □

Exemple. Considérons la série entière $\sum n^2 z^n$. On a $\frac{(n+1)^2}{n^2} = (1+\frac{1}{n})^2 \to 1$ donc le rayon de convergence est 1.

Pour la série entière $\sum n! z^n$, on a $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty$ donc le rayon de convergence est 0.

Pour la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$, on a $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0$ donc le rayon de convergence est $+\infty$.

Il faut toutefois faire attention car l'hypothèse $a_n \neq 0$ pour n assez grand est importante. Par exemple, considérons la série entière $\sum n! z^{n^2}$. Si on écrit cette série sous la forme $\sum a_k z^k$, on voit que $a_k = n!$ si $k = n^2$ mais, si k n'est pas un carré, on a $a_k = 0$. Ainsi de très nombreux coefficients de cette série entière sont nuls. Une telle série entière est dite *lacunaire*. Dans ce cas pour déterminer le rayon de convergence, il faut revenir à la définition du rayon de convergence ou à l'étude des séries numériques. Par exemple on peut directement appliquer la règle de D'Alembert à la série numérique $\sum n! z^{n^2}$:

$$\frac{(n+1)!|z|^{(n+1)^2}}{n!|z|^{n^2}} = (n+1)|z|^{2n+1} \to \begin{cases} 0 & \text{si } |z| < 1 \\ +\infty & \text{si } |z| \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi la série converge si $|z| < 1$ et diverge sinon : le rayon de convergence est 1.

Un autre cas ou la règle de D'Alembert ne s'applique pas est le cas où $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'a pas de limite. Par exemple, considérons la série entière $\sum (3+(-1)^n) z^n$ *i.e.* $a_n = 3+(-1)^n$. On a alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ou $\frac{1}{2}$ suivant que n est pair ou impair : le rapport n'a pas de limite. Toutefois, on a $2|z|^n \leq a_n|z|^n \leq 4|z|^n$; ainsi la suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$. Le rayon de convergence est 1.

On peut aussi adapter la règle de Cauchy, ce qui donne une expression du rayon de convergence.

Proposition 4.5.12 (Formule de Hadamard)**.** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On a alors*

$$\frac{1}{R} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

avec $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$.

Démonstration. Appliquons la règle de Cauchy à la série numérique $\sum a_n z^n$. On a $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$. Si $|z| < (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ la série converge et si $|z| > (\limsup \sqrt[n]{|a_n|})^{-1}$ la série diverge. Ceci donne le résultat. □

Exemple. Déterminons le rayon de convergence de la série entière $\sum n^n z^{n!}$. Il s'agit là aussi d'une série lacunaire. Nous allons appliquer la formule de Hadamard. Notons que les coefficients a_k vérifient $a_k = n^n$ si $k = n!$ et 0 sinon. On est donc amené à déterminer $\limsup \sqrt[n!]{n^n}$. On a

$$\sqrt[n!]{n^n} = n^{\frac{n}{n!}} = n^{\frac{1}{(n-1)!}} = e^{\frac{1}{(n-1)!}\ln n} \to 1$$

Ainsi la limite supérieure vaut 1 et le rayon de convergence est 1.