Exercices Supplémentaires.

$\boxed{1}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{4n^3 - n}$.

1) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \int_0^1 (1-x)^2 x^{2n-2}\, dx.$$

3) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\, dx + \int_0^1 \frac{1-x}{1+x} x^{2N}\, dx.$$

4) En déduire $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\ln 2 - 1$.

$\boxed{2}$ Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f'(t)|\, dt$ est convergente. On pose

$$u_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

1) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_n^{n+1} (t-n-1) f'(t)\, dt = u_n.$$

En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\, dt.$$

2) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est absolument convergente.

3) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\int_1^n f(t)\, dt\right)$ converge.

4) Application : Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\sqrt{k}, \quad \text{et} \quad t_n = S_n + \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}.$$

On se propose de montrer que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

1) On pose $u_n = t_{n+1} - t_n$. Montrer que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{4\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{16n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

2) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

3) En déduire que la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$ et $v_n = u_n - u_{n+1}$.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) Montrer que $v_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente et on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

3) Calculer $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ et en déduire que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$.

5 1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,dt$ est convergente.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt$.

a) Calculer u_0.

b) Montrer que $u_n = e^{-n\pi}u_0$. (Utiliser le changement de variable $x = t - n\pi$).

3) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente et calculer sa somme.

4) En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,dt = \frac{1}{2}\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}.$$

Corrigé des exercices supplémentaires (3)

Ex1 1) $u_n = \dfrac{1}{4n^3-n}$, $n \geq 1$, $u_n \geq 0$ $u_n \sim \dfrac{1}{4n^3}$, $\sum \dfrac{1}{n^3}$ cv

donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2) $$\int_0^1 x^{2n-2}(1-x)^2\,dx = \int_0^1 x^{2n-2}(x^2-2x+1)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{2n} - 2x^{2n-1} + x^{2n-2})\,dx = \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} - \frac{2}{2n}x^{2n} + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n-1} = \frac{4n}{4n^2-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{4n^3-n} = u_n$$

Ainsi on a $\underline{u_n = \int_0^1 x^{2n-2}(1-x)^2\,dx}$

3) Soit $N \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_N = \sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \int_0^1 x^{2n-2}(1-x)^2\,dx = \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^N x^{2n-2}(1-x)^2\right]dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2\left(\sum_{n=1}^N x^{2n-2}\right)dx$$

$$\sum_{n=1}^N x^{2n-2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2(N-1)} = \sum_{n=0}^{N-1}(x^2)^n = \frac{1-(x^2)^N}{1-x^2}, \text{ si } 0 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 \sum_{n=1}^N x^{2n-2} = (1-x)^2\frac{1-x^{2N}}{1-x^2} = \frac{1-x}{1+x}(1-x^{2N}), \text{ si } 0 \leq x < 1$$

Ainsi on a $\forall x \in [0,1[$ $(1-x)^2 \sum_{n=1}^N x^{2n-2} = \dfrac{1-x}{1+x}(1-x^{2N})$

Cette égalité est encore vrai pour $x=1$. D'où

$$\forall x \in [0,1] \quad (1-x)^2\left(\sum_{n=1}^N x^{2n-2}\right) = \frac{1-x}{1+x}(1-x^{2N}), \quad N \in \mathbb{N}^*$$

On obtient :

$$S_N = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}(1-x^{2N})\,dx = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx - \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}x^{2N}\,dx$$

4) Cherchons la limite : $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}x^{2N}\,dx$

On a $\forall x\in[0,1]$ $\quad 0 \leq \frac{1-x}{1+x}x^{2N} \leq x^{2N} \quad \left(0\leq \frac{1-x}{1+x} \leq 1\right)$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}x^{2N}\,dx \leq \int_0^1 x^{2N}\,dx = \frac{1}{2N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}x^{2N}\,dx = 0$$

Ainsi on a $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{1-x}{1+x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x}-1\right)dx = \Big[2\ln(1+x) - x\Big]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

Conclusion $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n = 2\ln 2 - 1$

Ex2

1) En intègre par parties avec $u'(t)=f'(t)$ et $v(t) = t-n-1$ on a $u(t)=f(t)$, $v'(t)=1$ et

$$\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\,dt = \Big[(t-n-1)f(t)\Big]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

$$= f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$$

Ainsi on a :

$$\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\,dt = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt = u_n$$

Il vient $\quad |u_n| = \left|\int_n^{n+1}(t-n-1)f'(t)\,dt\right| \leq \int_n^{n+1}|t-n-1|\,|f'(t)|\,dt$

$\forall t\in[n,n+1]$, on a $t-n-1\leq 0$ et $|t-n-1|=n+1-t\leq 1$ $(n-t\leq 0)$

On obtient :

$$|u_n|\leq\int_n^{n+1}|t-n-1|\,|f'(t)|\,dt\leq\int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt.$$

$$\underline{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n|\leq\int_n^{n+1}|f'(t)|\,dt}\qquad(1)$$

2) Montrons que $\sum_{n\geq1}u_n$ est absolument convergente.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, d'après (1) on a :

$$\sum_{k=1}^{n}|u_k|\leq\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}|f'(t)|\,dt=\int_1^{n+1}|f'(t)|\,dt.$$

Par hypothèse on a $\int_1^{+\infty}|f'(t)|dt$ converge et comme $|f'(t)|\geq 0$

on a $\int_1^{n+1}|f'(t)|dt\leq\int_1^{+\infty}|f'(t)|dt$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

Il vient $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}|u_k|\leq\int_1^{+\infty}|f'(t)|dt$

$\Rightarrow$ la série $\sum_{k\geq1}|u_k|$ est convergente

3) On a $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(n)=u_n+\int_n^{n+1}f(t)\,dt$

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}f(t)\,dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n}u_k+\int_1^{n+1}f(t)\,dt$$

Comme la série $\sum_{k\geq1}u_k$ est convergente on a $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f(k)$ existe si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\int_1^{n+1}f(t)dt$ existe ie

$\sum_{k\geq1}f(k)$ converge $\Leftrightarrow$ la suite $\left(\int_1^{n}f(t)dt\right)_n$ converge.

4) Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Posons $f(t) = \frac{\sin\sqrt{t}}{t}$, $t \geq 1$

• $\underline{\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt}$ converge ?

$\forall t\geq 1,\ f'(t) = \dfrac{\frac{\cos(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} - \sin\sqrt{t}}{t^2}$, $|f'(t)| \leq \dfrac{|\cos\sqrt{t}|}{2t^2\sqrt{t}} + \dfrac{|\sin\sqrt{t}|}{t^2}$

$|f'(t)| \leq \frac{1}{2t^{5/2}} + \frac{1}{t^2}$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{5/2}}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ sont cv

$\Rightarrow \int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt$ converge.

• $\underline{\left(\int_1^n f(t)\,dt\right)_{n\geq 1}}$ converge ?

Le chagement de variable $y = \sqrt{t}$ nous donne $dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$

$\Rightarrow dt = 2\sqrt{t}\,dy = 2y\,dy$ et $\int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt = \int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin y}{y^2}\,2y\,dy$

$\Rightarrow \int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt = 2\int_1^{\sqrt{n}} \frac{\sin y}{y}\,dy$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$ est cv

on a $\int_1^n \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\int_1^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy$.

Les conditions du résultat précédent sont vérifiés

On a donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin\sqrt{n}}{n}$ est convergente.

Ex 3

$n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sqrt{k}$, $t_n = S_n + \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}$

1) $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = t_{n+1} - t_n = S_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n+1} - S_n - \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}$

$S_{n+1} - S_n = (-1)^n . \sqrt{n+1}$, d'où

$$u_n = (-1)^n \sqrt{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n+1} - \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}$$

$$= (-1)^n \left[\sqrt{n+1} - \frac{1}{2}\sqrt{n+1} - \frac{1}{2}\sqrt{n}\right] = \frac{(-1)^n}{2}\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right]$$

On a $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + t^2\varepsilon(t)$ avec $\varepsilon(t) \longrightarrow 0$ qd $t \to 0$

D'où $u_n = \frac{(-1)^n}{2}\sqrt{n}\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(\frac{1}{n})\right]$

$$= \frac{(-1)^n}{4\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{16 n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{2 n^{3/2}}\varepsilon(\frac{1}{n})$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{(-1)^n}{4\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n+1}}{16 n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$\sum u_n$ converge ? On a $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{4\sqrt{n}}$ et

$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{16 n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, $\sum a_n$ cv (Série alternée avec $\frac{1}{4\sqrt{n}} \searrow 0$)

$b_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{16 n^{3/2}} \Rightarrow |b_n| \sim \frac{1}{16 n^{3/2}}$, $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ cv $\Rightarrow \sum |b_n|$ cv $\Rightarrow \sum b_n$ cv

Conclusion $\sum u_n$ converge

2) Posons $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} u_k = L \in \mathbb{R}$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (t_{k+1} - t_k) = t_{n+1} - t_1 \longrightarrow L$$

$\Rightarrow t_{n+1} \longrightarrow t_1 + L \Rightarrow$ la suite $(t_n)_n$ est convergente

Ex4

$n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$, $v_n = u_n - u_{n+1}$

1) Montrons que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

On a $u_n > 0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} < 1$. D'après le critère de d'Alembert on a $\sum u_n$ converge.

2°/ $v_n = u_n - u_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{2^n} - \frac{\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$

On a $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} + t\varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. D'où

$v_n = u_n - u_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)$ $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$= \frac{\sqrt{n}}{2^n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4n} - \frac{1}{2n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} - \frac{1}{4\,2^n}\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{n}}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{2^{n+1}} = \frac{u_n}{2} > 0$, $\sum_{n\geq 1} u_n$ cv donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge

D'après un théorème du cours on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \underset{+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k}{2}$

3°/ $N \geq n+1$, $\sum_{k=n+1}^{N} v_k = \sum_{k=n+1}^{N} (u_k - u_{k+1}) = u_{n+1} - u_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} u_{n+1}$

(On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\sum u_n$ cv) $\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = u_{n+1}$, il vient :

d'après 2°/ on a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \sim \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

$u_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Ainsi on a :

$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} 2u_{n+1} = \frac{2\sqrt{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n} \sim \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

$\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Ex 5

1) $\forall t \geq 0,\ 0 \leq e^{-t}|\sin t|\,dt \leq e^{-t}$, $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ cv donc $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,dt$ cv

2) $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt$

a) $u_0 = \int_0^{\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$ $\left(\sin t \geq 0\ \forall t \in [0,\pi]\right)$

On intègre deux fois par parties.

$\begin{cases} u' = e^{-t} \\ v = \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -e^{-t} \\ v' = \cos t \end{cases}$, $\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = \left[-e^{-t}\sin t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt$

$= \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt$

$\begin{cases} u' = e^{-t} \\ v = \cos t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = -e^{-t} \\ v' = -\sin t \end{cases}$

$\int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt = -\left[e^{-t}\cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = -\left(-e^{-\pi}-1\right) - \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$

Ainsi on a $\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt = e^{-\pi}+1-\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$

$\Rightarrow 2\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = e^{-\pi}+1 \Rightarrow \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt = \frac{e^{-\pi}+1}{2} \Rightarrow \underline{u_0 = \frac{e^{-\pi}+1}{2}}$

b) Le changement de variable $x = t - n\pi$ nous donne

$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt = \int_0^{\pi} e^{-x-n\pi}|\sin(x+n\pi)|\,dx = e^{-n\pi}\int_0^{\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$

$\Rightarrow \underline{u_n = e^{-n\pi}u_0,\ n \in \mathbb{N}}$

3) $u_n = u_0\left(e^{-\pi}\right)^n$, $0 \leq e^{-\pi} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 0} u_n$ cv et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-\pi}\right)^n = \frac{u_0}{1-e^{-\pi}}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\,\frac{e^{-\pi}+1}{1-e^{-\pi}} = \frac{1}{2}\,\frac{1+e^{\pi}}{e^{\pi}-1} \Rightarrow \underline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}}$

4) On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$

$\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt = \int_0^{(N+1)\pi} e^{-t}|\sin t|\,dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,dt$

D'où : $\int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin t|\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$