CONTRÔLE CONTINU NO.2.
Durée 2h. Barème indicatif.
Documents et calculatrices interdits.
Toute réponse (et toute opération TàT) doit être justifiée.

Exercice 1. *(6 pts)*

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ dans les cas suivants :

(i) lorsque $a_n = \dfrac{n^2}{5^n}$ (ii) lorsque $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ (iii) lorsque $a_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3^n, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Indication : Chacune des formules (Hadamard, Cauchy, D'Alembert) sera utile.

2. (a)Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{3-x}$ se décompose en série entière $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{3^m}$ sur l'intervalle ouvert $]-3,3[$.
La convergence sur cet intervalle est-elle absolue ? Est-elle normale ?
(c) Justifier (sans calculer l'intégrale) l'égalité $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{(m+1)3^m}$.
(d) Vérifier que $\big(x+3\ln(3-x)\big)' = -f(x)$ et trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2/3)^n}{n+2}$.

Exercice 2. *(7 pts)*
On désigne par $f(.)$ la fonction *paire, 2π-périodique* qui sur l'intervalle $[0,\pi]$ est donnée par l'expression

$$f(x) = \pi - 2x.$$

1. (a) Esquisser le graphe de $f(.)$. Indiquer, sans preuve, la régularité qu'a cette fonction (continue sur $\mathbb{R}$? C^1 sur $\mathbb{R}$? C^1 par morceaux) ?
(b) En déduire l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $SF_f(x) = f(x)$.
(c) En utilisant le croquis (on ne demande pas de preuve par le calcul), trouver la valeur de $\max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

2. (a) Montrer que la série de Fourier de $f(.)$ s'écrit

$$SF_f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

Pour le calcul des coefficients a_n, $n \geq 1$, séparer les cas selon la parité de n.
(b) La série $SF_f(.)$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
(c) En utilisant le théorème de Dirichlet, trouver la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

3. En utilisant les résultats des questions précédentes, justifier que l'on a
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \le 2\pi^3$$
et en déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \le \frac{\pi^4}{32}$.

Exercice 3. *(7 pts)*

1. On considère la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (elle est parfois notée sinh). Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots.$$
2. On s'intéresse à la résolution, par la méthode des séries entières, de l'équation différentielle
$$y'' - 4y = 4 \qquad (ED)$$
avec les conditions initiales
$$y(0) = -1,\ y'(0) = 2. \qquad (CI)$$
On cherche la solution $y(x)$ de (ED),(CI) sous la forme d'une série entière
$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots.$$
On va supposer en premier temps que l'on a le droit de dériver l'expression de $y(x)$ terme à terme.
(a) Identifier les valeurs a_0 et a_1.
(b) Montrer que $a_2 = 0$ puis que, pour $n \ge 1$, $4a_n = (n+1)(n+2)a_{n+2}$.
(c) Poser $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$. Déduire des questions précédentes que $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ et que pour $n \ge 1$, $b_n = (n+1)(n+2)b_{n+2}$.
(d) En déduire l'expression de b_k pour $k \ge 3$ (on ne demande pas la justification par récurrence) puis celle de a_k, $k \ge 3$. Expliciter la série obtenue pour $y(x)$.
(e) La dérivation terme à terme pour la série obtenue est-elle justifiée, à ce stade ?
3. Donner une expression de la solution recherchée y en utilisant la fonction sh.

Exercice 4. *(hors barème)*
Soit
$$f(x) = 2 + 3\sin(x) - \cos(5x).$$
Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = 18\pi$.