Université François Rabelais de Tours
Département de Mathématiques

Td 5 : Endomorphismes des espaces euclidiens

Algèbre — Semestre 4, 2020

Exercice 1. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}({}^tAB)$. Déterminer l'adjoint f^* de f dans les trois cas suivants :

1. $f(A) = {}^tA$,
2. $f(A) = \dfrac{A + {}^tA}{2}$,
3. $f(A) = MA$ avec $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée.

Exercice 2. Soient f et g deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Prouver l'équivalence $(g \circ f$ est symétrique$) \Leftrightarrow (g \circ f = f \circ g)$.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

1. Prouver l'équivalence entre les assertions suivantes :
   (i) $f^* = -f$,
   (ii) $\forall x \in E,\ \langle x, f(x)\rangle = 0$,
   (iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle$,
   (iv) La matrice représentant f dans une base orthonormée de E est antisymétrique.

   Un endomorphisme vérifiant l'une des quatres propositions ci-dessus est dit antisymétrique. On note $\mathcal{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de E.
2. Etablir que $\mathcal{A}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ et en donner sa dimension.
3. Prouver que le spectre (sur $\mathbb{R}$) d'un endomorphisme antisymétrique est soit $\varnothing$ soit réduit à $\{0\}$. En déduire qu'un endomorphisme antisymétrique non nul de E n'est jamais diagonalisable.
4. Montrer que si $\dim(E)$ est impaire et f un endomorphisme antisymétrique, 0 est valeur propre de f.
5. Soit $f \in \mathcal{A}(E)$. Prouver que $\mathrm{Im}(f) = (\mathrm{Ker}\,(f))^\perp$.
6. Soient $f, g \in \mathcal{A}(E)$. Montrer que $f \circ g - g \circ f \in \mathcal{A}(E)$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. A tout $P \in E$, on associe $f(P) = X(X-1)P'' + (2X-1)P' = (X(X-1)P')'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme symétrique de E.
2. Déterminer la matrice A représentant f dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ de E. Qu'en déduisez-vous pour $\mathcal{B}_0$?

Exercice 5. Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et f un endomorphisme *normal* de E, c'est-à-dire tel que $f \circ f^* = f^* \circ f$.

1. Vérifier que les endomorphismes symétriques, antisymétriques et orthogonaux de E sont normaux.
2. Montrer que $f \in L(E)$ est normal si et seulement si $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|f^*(x)\|$.
3. En déduire que si x est un vecteur propre pour f alors x est également un vecteur propre pour f^*.

Exercice 6. 1. Déterminer les réels a, b, c, d tels que $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & d & c \end{pmatrix} \in O_3^+(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les matrices réelles orthogonales triangulaires d'ordre 2 puis d'ordre 3.

Exercice 7. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ symétrique et orthogonale.

1. Caractériser géométriquement l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

2. Dans les 2 cas suivants, caractériser géométriquement l'endomorphisme f_i de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A_i, avec $A_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2-1 & \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Démontrer que si $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ désignent les valeurs propres de f (comptées avec multiplicité) alors, pour tout $x \in E$,
$$\lambda_1 \|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x) \rangle \leqslant \lambda_n \|x\|^2.$$

2. En déduire que, si $\lambda_1 > 0$, l'application $b(x,y) = \langle x, f(y) \rangle$ définit un produit scalaire sur E.

Exercice 9. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Prouver que $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ sont des endomorphismes symétriques positifs de E.

2. Prouver que f est un automorphisme de E si et seulement si l'un ou l'autre des $f \circ f^*$ et $f^* \circ f$ est symétrique défini positif.

Un endomorphisme symétrique g est dit ***positif*** si $\langle x, g(x) \rangle \geqslant 0$ pour tout $x \in E$ et ***défini positif*** si, de plus, $\langle x, g(x) \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Exercice 10. 1. Diagonaliser en base orthonormée les matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dans quelle cas la matrice A_i est-elle positive (resp. définie positive) ?

Exercice 11. A toute permutation σ de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, on associe la matrice (dite de permutation d'ordre n) $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1. Lister toutes les matrices de permutation d'ordre 2 et 3. Donner une caractérisation d'une matrice de permutation et prouver que toute matrice de permutation est orthogonale.

2. Calculer $P_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. En déduire qu'il existe une valeur propre (et un vecteur propre) commune à toutes les P_σ.

3. Calculer $P_{\sigma_1} P_{\sigma_2}$ avec $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Qu'en déduisez-vous ?

4. Calculer $\det(P_\sigma)$.