Université de Tours
Licence 2 Mathématiques

TD 2 : PGCD

Arithmétique — Semestre 1

Exercice 1
Trouver le pgcd des paires de nombres suivants et l'exprimer comme une combinaison linéaire des nombres donnés :
$$(26, 19); \quad (187, 34); \quad (841, 160).$$

Exercice 2
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d = \mathbf{pgcd}\,(a, b)$. Démontrer les assertions suivantes :

1. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{pgcd}\,(a, b + ma) = \mathbf{pgcd}\,(a, b)$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{pgcd}\,(ma, mb) = |m| \times \mathbf{pgcd}\,(a, b)$.
3. $\mathbf{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$.

Exercice 3 (Vrai ou faux ?)
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{N}^*$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si d divise $\mathbf{pgcd}\,(a, b)$, alors d divise a et d divise b.
2. Si d divise $a + b$, alors d divise $\mathbf{pgcd}\,(a, b)$.
3. Si d divise ab, alors d divise a ou d divise b.
4. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{pgcd}\,(a, a + bm) = \mathbf{pgcd}\,(a, b)$.
5. Si $\mathbf{pgcd}\,(a, b) = 1$, alors $\mathbf{pgcd}\,(a, a + b) = 1$ et $\mathbf{pgcd}\,(b, a + b) = 1$.

Exercice 4* (PGCD et Bézout)
Soient a et b deux entiers.

1. (a) Montrer que si
$$\exists x, y \in \mathbb{Z}, \quad ax + by = 1,$$
alors a et b sont premiers entre eux.
   (b) Montrer que la réciproque est vraie. *Indication : on pourra montrer que l'ensemble*
$$\mathbf{E} = \{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}^*$$
admet un plus petit élément.
2. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$d = \mathbf{pgcd}\,(a, b) \implies \exists x, y \in \mathbb{Z}, \quad ax + by = d.$$
Que dire de la réciproque ?
3. Soit $d \in \mathbb{Z}$. Que dire de l'assertion :
$$(a \mid d \quad \text{et} \quad b \mid d) \implies ab \mid d.$$
Et si a et b sont premiers entre eux ?