FORMULAIRE

Rappels : identités remarquables

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

I Suites arithmétiques et géométriques

1) Suites arithmétiques

Termes de la suite (r désigne la raison) :

$u_{n+1} - u_n = r$
$u_n = u_0 + nr$
$u_n = u_p + (n-p)r$

Somme des termes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

Cas général avec $n_1 \leq n_2$:

$$S' = \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \frac{(\text{nombre de termes})(\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Cas particulier :

$$1 + 2 + 3 \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Suites géométriques

On suppose que la suite est non nulle. Termes de la suite (q désigne la raison) :

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$
$u_n = u_0 * q^n$
$u_n = u_p * q^{n-p}$

Somme des termes :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 * \dfrac{1 - q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Cas général avec $n_1 \leq n_2$:

$$S' = \sum_{k=n_1}^{n_2} u_k = \begin{cases} (\text{premier terme}) * \dfrac{1 - \left(q^{\text{nombre de termes}}\right)}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (\text{nombre de termes}) * (\text{premier terme}) & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

II Formules de dérivation

1) Formules générales

Dans ce qui suit, u et v désignent deux fonctions d'une variable réelle x et k une constante réelle.

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(ku)' = ku'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(v \circ u)' = u' * (v' \circ u)$$

$$(u^{-1})' = \frac{1}{u' \circ u^{-1}}$$

2) Fonctions usuelles

a) Fonctions non composées

Fonction f	$\mathcal{D}_f$	Fonction dérivée f'	$\mathcal{D}_{f'}$
k	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	$\mathbb{R}$	1	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$si $n < 0$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$si $n < 0$
x^α avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}^+$ si $\alpha \geq 0$ $\mathbb{R}^{+*}$si $\alpha < 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^+$ si $\alpha > 1$ $\mathbb{R}^{+*}$si $\alpha < 1$
$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\exp x$	$\mathbb{R}$	$\exp x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\mathbb{R}$	$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$

Les dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques figurent sur les pages suivantes.

b) Fonctions composées

Fonction f	Fonction dérivée f'
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1}$
$\ln\lvert u\rvert$	$\frac{u'}{u}$
$\exp u$	$\mathrm{u}' * \exp u$
$\sin u$	$u' * \cos u$
$\cos u$	$-\mathrm{u}' * \sin u$
$\tan u$	$\mathrm{u}' * (1+\tan^2 \mathrm{u}) = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$\mathrm{sh}\, u$	$u' * \mathrm{ch}\, u$
$\mathrm{ch}\, u$	$\mathrm{u}' * \mathrm{sh}\, u$
$\mathrm{th}\, u$	$\mathrm{u}' * (1-\mathrm{th}^2 \mathrm{u}) = \frac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$

III Fonctions trigonométriques et hyperboliques

1) Fonctions trigonométriques

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos \mathrm{a} \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos \mathrm{a} \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin \mathrm{a} \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin \mathrm{a} \cos b - \sin b \cos a$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{(a+b)}{2}\cos\frac{(a-b)}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{(a+b)}{2}\sin\frac{(a-b)}{2}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{(a+b)}{2}\cos\frac{(a-b)}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{(a-b)}{2}\cos\frac{(a+b)}{2}$$

2) Fonctions hyperboliques

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$$

$$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch\,a}\,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch\,a}\,\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b$$

$$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh\,a}\,\mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, b\, \mathrm{ch}\, a$$

$$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh\,a}\,\mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, b\, \mathrm{ch}\, a$$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}$$

$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}$$

$$\mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)]$$

$$\mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)]$$

$$\mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b = \frac{1}{2}[\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)]$$

$$\mathrm{ch}\, a + \mathrm{ch}\, b = 2\,\mathrm{ch}\frac{(a+b)}{2}\mathrm{ch}\frac{(a-b)}{2}$$

$$\mathrm{ch}\, a - \mathrm{ch}\, b = 2\,\mathrm{sh}\frac{(a+b)}{2}\mathrm{sh}\frac{(a-b)}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, a + \mathrm{sh}\, b = 2\,\mathrm{sh}\frac{(a+b)}{2}\mathrm{ch}\frac{(a-b)}{2}$$

$$\mathrm{sh}\, a - \mathrm{sh}\, b = 2\,\mathrm{sh}\frac{(a-b)}{2}\mathrm{ch}\frac{(a+b)}{2}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$= 2\cos^2 x - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 x$$
$$= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$
$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$$
$$= \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$
$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\mathrm{ch}(2x) = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$$
$$= 2\mathrm{ch}^2 x - 1$$
$$= 1 + 2\mathrm{sh}^2 x$$
$$= \frac{1 + \mathrm{th}^2 x}{1 - \mathrm{th}^2 x}$$
$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1 + \mathrm{ch}(2x)}{2}$$
$$\mathrm{sh}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{2}$$
$$\mathrm{th}^2 x = \frac{\mathrm{ch}(2x) - 1}{\mathrm{ch}(2x) + 1}$$
$$\mathrm{sh}(2x) = 2\,\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,x$$
$$= \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 - \mathrm{th}^2 x}$$
$$\mathrm{th}\,2x = \frac{2\,\mathrm{th}\,x}{1 + \mathrm{th}^2 x}$$

3) Points sur le cercle trigonométrique

	$-x$	$\frac{\pi}{2}+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\pi+x$	$\pi-x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$	$-\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	$-\tan x$	$-\frac{1}{\tan x}$	$\frac{1}{\tan x}$	$\tan x$	$-\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

4) Trigonométrie réciproque

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$
$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \mathrm{sg}(x).\frac{\pi}{2}$$
avec $\mathrm{sg}(x) = 1$ si $x > 0$ et -1 si $x < 0$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$
$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$
$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$$
$$(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$$

5) Trigonométrie hyperbolique réciproque

$$\mathrm{argsh}\,x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$
$$\mathrm{argch}\,x = \ln\left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)$$
$$\mathrm{argth}\,x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$
$$(\mathrm{argsh}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$(\mathrm{argch}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$
$$(\mathrm{argth}\,x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$
$$(\mathrm{argsh}\,u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}$$
$$(\mathrm{argch}\,u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$$
$$(\mathrm{argth}\,u)' = \frac{u'}{1 - u^2}$$

IV Limites usuelles

1) Comportement à l'infini

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} = 0$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Si } \alpha > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty \\
\text{Si } \alpha > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} * \exp(-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x} = 0 \\
\text{Si } \alpha > 0,\ \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} e^{x} = 0 \\
\text{Si } \alpha > 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0
\end{array}\right\} \text{propriétés de croissance comparée}$$

2) Comportement à l'origine

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = 0$

Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} \ln x = 0$ propriété de croissance comparée

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin\ x}{x} = 1$

V Formules d'intégration

1) Primitives usuelles

Si $\alpha \neq -1$, $\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + cte$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cte$

$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + cte$

$\int \exp x \, dx = \exp x + cte$

Si $a > 0$ et $a \neq 1$,

$\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} * a^x + cte$

$\int \cos x \, dx = \sin x + cte$

$\int \sin x \, dx = -\cos x + cte$

Si $a \neq 0$, $\int \cos ax \, dx = \frac{1}{a} \sin ax + cte$

Si $a \neq 0$, $\int \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} \cos ax + cte$

$\int \frac{1}{(\cos x)^2} dx = \tan x + cte$

$\int (1 + (\tan x)^2) \, dx = \tan x + cte$

$\int \frac{1}{(\sin x)^2} dx = -\text{cotan}\, x + cte$

$= -\frac{1}{\tan x} + cte$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + cte$

$\int \text{ch}\, x \, dx = \text{sh}\, x + cte$

$\int \text{sh}\, x \, dx = \text{ch}\, x + cte$

$\int \frac{1}{(\text{ch}\, x)^2} dx = \text{th}\, x + cte$

$\int \frac{1}{(\text{sh}\, x)^2} dx = \frac{1}{\text{th}\, x} + cte$

2) Fonctions trigonométriques et hyperboliques

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + cte$

$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + cte$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \text{arg sh}\, x + cte$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \text{arg ch}\, x + cte$

$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + cte$

Si $a \neq 0$,

$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} * \arctan \frac{x}{a} + cte$

Si $a \neq 0$,

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + cte$

Si $a > 0$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + cte$

Si $a > 0$, $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \text{arg sh} \frac{x}{a} + cte$

$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + cte$

$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + cte$

$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + cte$

$\int \text{th}\, x \, dx = \ln(\text{ch}\, x) + cte$

$\int \ln x \, dx = x * \ln x - x + cte$

3) Fonctions composées

Si $\alpha \neq -1$,

$$\int u' * u^{\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + cte$$

$$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln|u| + cte$$

$$\int u' * \exp u\, dx = \exp u + cte$$

$$\int u' * \cos u\, dx = \sin u + cte$$

$$\int u' * \sin u\, dx = -\cos u + cte$$

$$\int \frac{u'}{(\cos u)^2}\, dx = \tan u + cte$$

$$\int u' * (1 + (\tan u)^2)\, dx = \tan u + cte$$

$$\int \frac{u'}{1+u^2}\, dx = \arctan u + cte$$

Si $a \neq 0$,

$$\int \frac{u'}{a^2+u^2}\, dx = \frac{1}{a} * \arctan \frac{u}{a} + cte$$

$$\int \mathrm{u}' * \operatorname{ch} u\, dx = \operatorname{sh} u + cte$$

$$\int \mathrm{u}' * \operatorname{sh} u\, dx = \operatorname{ch} u + cte$$

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\, dx = \arcsin u + cte$$

Si $a \neq 0$,

$$\int \frac{u'}{\sqrt{u^2+a}}\, dx = \ln\left|u + \sqrt{u^2+a}\right| + cte$$

Si $a > 0$, $\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}\, dx = \arcsin \frac{u}{a} + cte$

$$\int \frac{u'}{\sin u}\, dx = \ln\left|\tan \frac{u}{2}\right| + cte$$

$$\int \frac{u'}{\cos u}\, dx = \ln\left|\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + cte$$

$$\int u' * \tan u\, dx = -\ln|\cos u| + cte$$

$$\int u' * \operatorname{th} u\, dx = \ln(\operatorname{ch} u) + cte$$

VI <u>Développements limités</u>

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$
$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$
$$\operatorname{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + o(x^6)$$
$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{5} \dots + \frac{1 * 3 \dots * (2n-1)}{2 * 4 \dots * (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
$$\operatorname{arg\,sh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^3}{5} \dots + (-1)^n \frac{1 * 3 \dots * (2n-1)}{2 * 4 \dots * (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$
$$\operatorname{arg\,th} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$