Topologie et espaces vectoriels normés

Laurent Mazet

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés et espaces métriques

1.1 Espaces vectoriels

Rappelons rapidement qu'un espace vectoriel E sur un corps $\Bbbk$ est muni d'une loi de composition interne $+ : E \times E \to E$ et d'une loi de composition externe $\cdot :$ $\Bbbk \times E \to E$ telles que $(E, +)$ est un groupe abélien et la loi $\cdot$ vérifie certaines propriétés d'associativité et de distributivité par rapport à la loi $+$.

Dans ce cours, le corps sera toujours $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\Bbbk = \mathbb{C}$. Ainsi pour $\lambda \in \Bbbk$, $|\lambda|$ désignera la valeur absolue (resp. le module) de λ si $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. si $\lambda \in \mathbb{C}$).

Une des notions importantes des espaces vectoriels est celle de base et de dimension. Dans un premier temps nous allons surtout nous intéresser au cas des espaces vectoriels de dimension finie.

Des exemples classiques d'espaces vectoriels sont

- l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ qui peut être vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 2) ou $\mathbb{C}$-espace vectoriel (de dimension 1)
- l'espace des n-uplets $\Bbbk^n$ (de dimension n),
- l'espace des matrices $\mathcal{M}_{n,k}(\Bbbk)$ (de dimension $n \times k$),
- l'espace des polynômes $\Bbbk[X]$ (de dimension infinie) et $\Bbbk_n[X]$, celui des polynômes de degré au plus n (de dimension $n + 1$).
- L'espace des suites à valeur dans $\Bbbk$, $\Bbbk^{\mathbb{N}}$ (de dimension infinie).
- L'espace des fonctions d'un ensemble X dans $\Bbbk$, $\mathcal{F}(X, \Bbbk)$ (de dimension le cardinal de X si X est fini et infinie sinon).

Notons que tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension doublée). On pourrait donc se focaliser uniquement sur les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.2 Normes

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.2.1. Soit E un espace vectoriel, on appelle *norme* sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) Pour $x \in E$, $N(x) = 0$ implique $x = 0$ (séparation)

(ii) Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité)

(iii) Pour $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

On appelle espace vectoriel normé tout couple (E, N) où E est un espace vectoriel et N est une norme sur E.

Un autre notation classique pour les normes est $\|\cdot\|$: ainsi on note $\|x\| = N(x)$. La norme d'un vecteur $x \in E$ est la bonne façon de parler de la « longueur » du vecteur x.

Une conséquence de l'homogénéité est la propriété suivante

$$\|0_E\| = \|0_{\mathbb{k}} \cdot x\| = |0_{\mathbb{k}}| \|x\| = 0$$

Ainsi si $x = 0$, $\|x\| = 0$. C'est la réciproque de la propriété de séparation. Notons aussi que l'homogénéité implique $\|-x\| = \|x\|$.

Proposition 1.2.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On a alors les propriétés suivantes*

1. *Soit $x, y \in E$, on a $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$ (seconde inégalité triangulaire).*

2. *Soit $x_1, \ldots, x_n \in E$, on a*
$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Démonstration. Soit $x, y \in E$, en utilisant l'inégalité triangulaire on a

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

Ainsi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient, $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$. Ainsi on a

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

Ceci donne $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Pour la seconde propriété, la preuve se fait par récurrence sur n en utilisant l'inégalité triangulaire. Essentiellement, on écrit

$$\|\sum_{k=1}^{n} x_k\| = \|\sum_{k=1}^{n-1} x_k + x_n\| \leq \|\sum_{k=1}^{n-1} x_k\| + \|x_n\| \leq \sum_{k=1}^{n-1} \|x_k\| + \|x_n\| = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

$\square$

1.2.2 Exemples et construction de normes

Dans cet partie nous allons donner quelques exemples de normes.

La valeur absolue et le module

Si on considère $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ comme des espaces vectoriels, les applications valeur absolue ou module $x \mapsto |x|$ sont des normes. La vérification est laissée au lecteur.

Les normes p

Soit $p \in \mathbb{R}_+$. Pour un élément $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{k}^n$, on définit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Pour $p = \infty$, on définit

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

Pour $p = 2$, on a

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

On retrouve ainsi une norme vue en cours d'espace vectoriel euclidien en L2.

Proposition 1.2.3. *Pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{k}^n$.*

Démonstration. Nous allons écrire la preuve pour $p = 1$ et $p = \infty$. Pour les autres valeurs, nous renvoyons à l'Annexe A.

Pour $p = 1$, on a $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ est donc une somme de termes positifs donc $\|x\|_1 \in \mathbb{R}_+$. Supposons maintenant que $\|x\|_1 = 0$. On a donc une somme de termes positifs qui est nulle ceci implique que tous les termes de la somme sont nuls. Ainsi $|x_k| = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ ou encore $x_k = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Ainsi $x = 0$. La propriété de séparation est vérifiée.

Si $x \in \mathbb{k}^n$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. On a

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = \sum_{k=1}^{n} |\lambda||x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda|\|x\|_1$$

L'homogénéité est vérifiée. Enfin si $x, y \in \mathbb{k}^n$, on a

$$\|x + y\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = \|x\|_1 + \|y\|_1$$

L'inégalité triangulaire est vérifiée.

Pour $p = \infty$, on a $|x_k| \geq 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ donc $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \geq 0$. Si $\|x\|_\infty = 0$, on a $0 \leq |x_k| \leq \|x\|_\infty = 0$ pour tout $1 \leq k \leq n$ donc $|x_k| = 0$ ou encore $x_k = 0$. Ainsi $x = 0$. La propriété de séparation est vérifiée.

Si $x \in \mathbb{k}^n$ et $\lambda \in \mathbb{k}$. On a

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda x_k| = \max_{1\leq k\leq n} |\lambda||x_k| = |\lambda| \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = |\lambda|\|x\|_\infty$$

L'homogénéité est vérifiée. Enfin si $x, y \in \mathbb{k}^n$, on a pour tout $1 \leq k \leq n$

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k| \leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i| + \max_{1\leq i\leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

Donc

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k + y_k| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

L'inégalité triangulaire est vérifiée. □

Ces normes définies sur $\mathbb{k}^n$ permettent de définir des normes sur tout espace vectoriel de dimension finie. Si E est un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, tout vecteur $v \in E$ s'écrit de façon unique $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Ainsi on peut définir

$$N(v) = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_p$$

On vérifie alors que N est une norme sur E. Notez que si on change la base $\mathcal{B}$, on change la norme sur E.

Norme sur un sous-espace vectoriel

Si (E, N) est un espace vectoriel normé et $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, la restriction $N_F : F \to \mathbb{R}_+; x \mapsto N(x)$ définie une norme sur F appelée *norme induite.* Ainsi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé a une structure naturelle d'espace vectoriel normé.

Norme sur un produit d'espaces vectoriels normés

Soit (E_i, N_i) pour $1 \leq i \leq n$ des espaces vectoriels normés, on souhaite donner une structure d'espace vectoriel normé au produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$. Pour cela on s'inspire du cas de $\mathbb{k}^n$ et on définit pour $X = (x_1, \cdots, x_n) \in E$ et $p \geq 1$

$$\|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} N_k(x_k)^p\right)^{1/p}$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} N_k(x_k)$$

Proposition 1.2.4. *Soit $(E_i, N_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel produit. Alors pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur E.*

Norme d'algèbre

Dans certain cas l'espace vectoriel E est aussi une algèbre, c'est-à-dire est muni d'un produit $\times$ compatible avec les deux lois $+$ et $\cdot$. C'est le cas, par exemple, pour $\mathbb{k}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ ou $\mathbb{k}[X]$, il peut être intéressant de demander une propriété supplémentaire à une norme définie sur E.

Définition 1.2.5. Soit $(E, +, \times, \cdot)$ une algèbre et N une norme sur E. On dit que N est une *norme d'algèbre* si, pour tout $x, y \in E$, on a

$$N(x \times y) \leq N(x)N(y)$$

Exemple. On peut munir $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'algèbre en définissant, pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$x \times y = (x_1, \ldots, x_n) \times (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$$

On peut alors vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre. En effet on a pour $1 \leq k \leq n$ $|x_k y_k| = |x_k||y_k| \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$. Ainsi en prenant le maximum, on obtient $\|xy\|_\infty \leq \|x\|_\infty \|y\|_\infty$.

1.2.3 Normes équivalentes

On a vu que sur $\mathbb{R}^2$, on pouvait définir plusieurs normes : les normes $\|\cdot\|_p$. Remarquons que ce ne sont pas les seules. On peut ainsi calculer

$$\begin{aligned} \|(1,1)\|_1 &= 1 + 1 = 2 \\ \|(1,1)\|_2 &= (1+1)^{1/2} = \sqrt{2} \\ \|(1,1)\|_\infty &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi la « longueur » du vecteur $(1, 1)$ dépend du choix de la norme. On peut se poser la question de la norme la plus « naturelle » sur $\mathbb{R}^2$. La norme $\|\cdot\|_2$ est une norme « géométrique » qui correspond à la notion de longueur que l'on expérimente dans la vie réelle. La norme $\|\cdot\|_\infty$ a l'avantage d'être aisée à manipuler.

Dans la suite, on souhaitera que les propriétés topologiques que l'on va introduire ne dépendent pas du choix de la norme. À cette fin, on a la définition

Définition 1.2.6. Soit E un espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont *équivalentes* si il existe $A, B > 0$ tels que

$$\forall x \in E,\ AN_1(x) \leq N_2(x) \leq BN_1(x)$$

Remarque. Cette notion définie une relation d'équivalence sur l'espace des normes définies sur E. Une notion topologique aura le bon goût de ne pas dépendre du choix entre deux normes équivalentes.

L'un des résultats importants de ce cours que nous ne démontrerons que plus loin est le résultat suivant.

Théorème 1.2.7. *Soit E un espace vectoriel de **dimension finie**. Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Avant de démontrer ce résultat nous allons devoir faire un choix de norme sur $\Bbbk^n$. Nous allons choisir $\|\cdot\|_\infty$ qui est plus facile à manipuler.

1.3 Espaces métriques

Travailler uniquement sur des espaces vectoriels normés est un peu restrictif pour décrire toutes les situations intéressantes. Pour cela on introduit la notion d'espace métrique.

Définition 1.3.1. Soit X un ensemble, une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est appelée *distance* si elle vérifie les propriétés suivantes

(i) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (séparation)

(ii) pour tout $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)

(iii) pour tout $x, y, z \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)

Si d est une distance sur X, on dit que (X, d) est un espace métrique.

Le lien entre espace vectoriel normé et espace métrique est donné par

Proposition 1.3.2. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On définit alors l'application*

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array}$$

d est alors une distance sur E.

Démonstration. Tout d'abord on a bien $d(x, y) = \|x - y\| \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs la promptiété de séparation pour les normes donne

$$d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$$

La propriété d'homogénéité donne

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$$

Enfin l'inégalité triangulaire donne

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$$

d est donc bien une distance sur E. □

Remarque. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée. Si $X \subset E$ est une partie, on peut considérer la restriction de la norme à X mais, si X n'est pas un sous espace vectoriel, on ne construit pas ainsi un espace vectoriel normé.

En revanche, la restriction de la fonction distance d à X définit elle une distance sur X. Ainsi (X, d) est un espace métrique. On peut donc retenir que toute partie d'un espace vectoriel normé peut être vue comme un espace métrique.

La notion d'espace métrique est plus générale que le seul cas des parties d'espaces vectoriels normés. Toutefois dans ce cours les seuls exemples d'espaces métriques que l'on rencontrera seront des parties d'espaces vectoriels normés. Même si les preuves n'en feront pas usage, on pourra toujours supposer que les espaces métriques considérés sont des parties d'espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|)$ et que la distance d est donnée par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Remarque. On peut d'ailleurs noter qu'une preuve similaire à celle du cas des normes permet d'établir un seconde inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in X,\ |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$$

Certaines des constructions vues sur les normes peuvent être étendues aux espaces métriques par exemple la restriction à une partie d'un espace métrique (distance induite) ou la construction d'une distance sur un produit d'espace métrique. Par exemple si $(X_i, d_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des espaces métriques, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ peut être muni d'une distance de la façon suivante. Pour $P = (p_1, \ldots, p_n)$ et $Q = (q_1, \ldots, q_n) \in X$, on pose

$$D(P, Q) = \max_{1 \leq i \leq n} d(p_i, q_i)$$

D est alors une distance sur X appelée *distance produit.*

On a aussi la notion de distance équivalente.

Définition 1.3.3. Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 et d_2 sont *équivalentes* si il existe $A, B > 0$ tels que

$$\forall x, y \in X,\ Ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Bd_1(x, y)$$

On montre aisément que sur un espace vectoriel deux normes équivalentes induisent des distances équivalentes.

1.4 Boules

L'une des notions de base que nous allons utiliser est celle de boules

Définition 1.4.1. Soit (X, d) un espace métrique, $p \in X$ et $r \in \mathbb{R}$. On définit alors

- $B(p, r) = \{x \in X \mid d(x, p) < r\}$ la *boule ouverte* de centre p et rayon r,
- $\overline{B}(p, r) = \{x \in X \mid d(x, p) \leq r\}$ la *boule fermée* de centre p et rayon r,

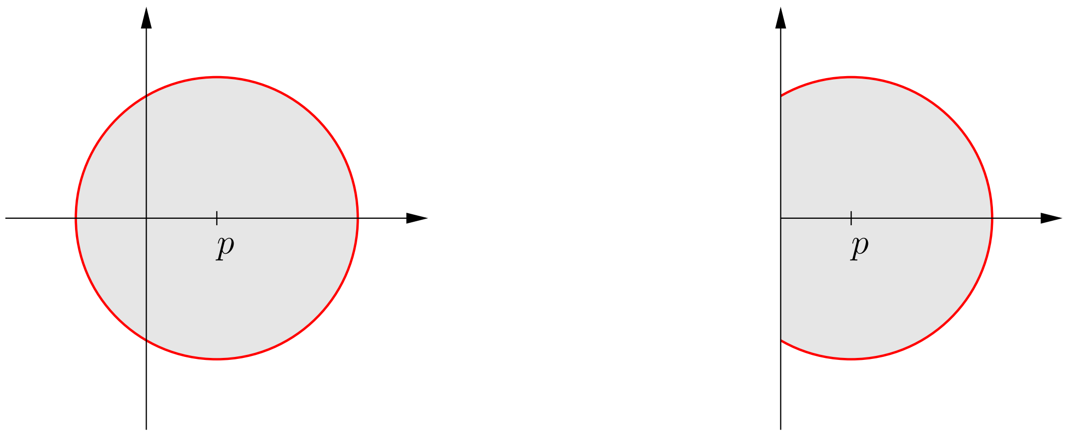

FIGURE 1.1 – Une boule dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$

- $S(p,r) = \{x \in X \mid d(x,p) = r\}$ la *sphère* de centre p et rayon r.

Dans un espace vectoriel normé, la boule ouverte est donc $B(p,r) = \{x \in E \mid \|x-p\| < r\}$. La boule ouverte $B(0,1)$ (resp. fermée $\overline{B}(0,1)$) centrée en l'origine et de rayon 1 est appelée boule ouverte (resp. fermée) unité.

Dans $\mathbb{R}$, si $p \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$, on a $B(p,r) =]p-r, p+r[$, $\overline{B}(p,r) = [p-r, p+r]$ et $S(p,r) = \{p-r, p+r\}$.

Considérons $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$, dans la Figure 1.1 (à gauche), on a représenté en grisé la boule ouverte de rayon 2 centrée en $p = (1,0)$, en rouge, on a la sphère et l'union des deux est la boule fermée.

On peut aussi considérer la partie $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$ comme un espace métrique muni de la distance induite. Dans ce cas (représenté à droite) la boule ouverte centrée en p et de rayon 2 est l'intersection de la partie grisée avec $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

D'une manière générale, si (X,d) est un espace métrique et $Y \subset X$ est une partie munie de la distance induite, les boules de (Y,d) sont les intersections avec Y des boules de (X,d).

Définition 1.4.2. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie. On appelle *diamètre* la quantité

$$\mathrm{Diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Si $\mathrm{Diam}(A)$ est fini, on dit que A est bornée.

Remarque. Soit $p \in X$, notons que A est bornée si et seulement si il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $A \subset \overline{B}(p,r)$. En effet si A est borné et $a \in A \subset X$, on a pour $x \in A$, $d(p,x) \leq d(p,a) + d(a,x) \leq d(p,a) + \mathrm{Diam}(A)$ et donc $A \subset \overline{B}(p, d(p,a) + \mathrm{Diam}\, A)$. Réciproquement, si $A \subset \overline{B}(p,r)$, on a, pour $x, y \in A$, $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) \leq 2r$ et donc $\mathrm{Diam}(A) \leq 2r < +\infty$.

Notons aussi que si d' est une distance équivalente à d, une partie A est bornée pour d si et seulement si elle est bornée pour d', la valeur du diamètre est elle *a priori* différente.

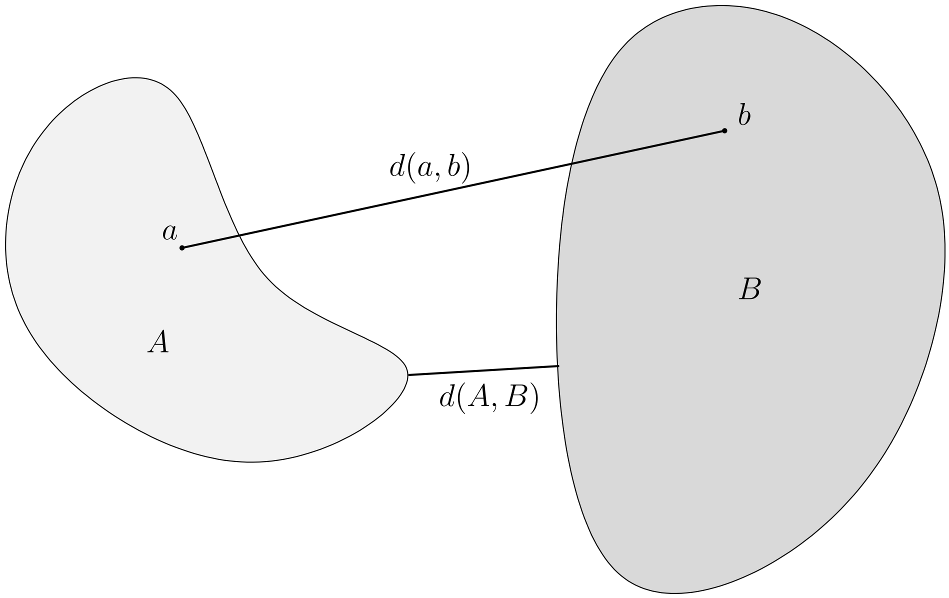

FIGURE 1.2 – La distance entre deux parties

Exemple. Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, on a $\mathrm{Diam}(B(p,r)) = 2r$. Pour un espace métrique on peut juste affirmer que $\mathrm{Diam}(B(p,r)) \leq 2r$.

Définition 1.4.3. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subset X$ deux parties de X. On appelle *distance* entre A et B la quantité

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b); a \in A, b \in B\}$$

Remarque. Si $A \cap B \neq \emptyset$, on a $d(A,B) = 0$, il suffit de prendre $x \in A \cap B$ et d'écrire $d(A,B) \leq d(x,x) = 0$.

Chapitre 2

Topologie des espaces métriques

2.1 Limite d'une suite

Avec le vocabulaire introduit dans le précédent chapitre, on peut définir la notion de convergence d'une suite de la façon suivante

Définition 2.1.1. Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de point de X et $\ell \in X$. On dit que la suite (x_n) *a ℓ comme limite* ou *converge vers ℓ* si $\lim d(x_n, \ell) = 0$ ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \implies d(x_n, \ell) \leq \varepsilon$$

La question de la convergence des suites est centrale dans ce cours. On verra dans la suite des situations où l'on peut assurer la convergence de certaines suites.

Proposition 2.1.2. *Soit (X, d) un espace métrique, $(x_n)_n$ une suite de point de X et $\ell, \ell' \in X$. Si la suite (x_n) a ℓ et ℓ' comme limite alors $\ell = \ell'$.*

Ce résultat nous permet donc de parler de la limite d'une suite (x_n) si elle existe. On note alors $\lim x_n = \ell$. Ainsi on dira qu'une suite est *convergente* si il existe $\ell \in X$ tel que $\lim x_n = \ell$ sinon on dira que la suite est *divergente*.

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire, on a $0 \leq d(\ell, \ell') \leq d(\ell, x_n) + d(x_n, \ell')$. Par hypothèse, le terme de droite tend vers 0 donc par passage à la limite $0 \leq d(\ell, \ell') \leq 0$. Ainsi $d(\ell, \ell') = 0$ et $\ell = \ell'$. □

Exemple. Dans le cas où $(X, d) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, on retrouve la définition classique d'une suite réelle convergente.

Regardons ce que dit la définition dans le cas $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $(X_n)_n = (x_n, y_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $A = (a, b)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. On a alors $\|X_n - A\|_\infty \to 0$. Par définition de la norme, on a

$$0 \leq |x_n - a| \leq \|X_n - A\|_\infty$$
$$0 \leq |y_n - b| \leq \|X_n - A\|_\infty$$

Comme le majorant tend vers 0, on en déduit que $|x_n - a| \to 0$ et $|y_n - b| \to 0$. Ainsi on vient de montrer que $\lim X_n = A$ implique que $\lim x_n = a$ et $\lim y_n = b$. Réciproquement supposons que $\lim x_n = a$ et $\lim y_n = b$. Fixons alors $\varepsilon > 0$, il existe alors n_1 et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que, pour $n \geq n_1$, $|x_n - a| \leq \varepsilon$ et, pour $n \geq n_2$, $|y_n - b| \leq \varepsilon$. Ainsi pour $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, $|x_n - a| \leq \varepsilon$ et $|y_n - b| \leq \varepsilon$. Ainsi pour $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\|X_n - A\|_\infty = \max\{|x_n - a|, |y_n - b|\} \leq \varepsilon$$

On a donc $\lim X_n = A$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Ainsi dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, une suite converge si et seulement les suites des coordonnées convergent. Ce résultat se généralise sans difficulté à $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ou encore à un produit d'espace métrique. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, on note alors d la métrique produit sur $X \times Y$. Si $(p_n) = (x_n, y_n)$ est une suite de $X \times Y$ et $\bar{p} = (\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$, on a $\lim p_n = \bar{p}$ dans $(X \times Y, d)$ si et seulement si $\lim x_n = \bar{x}$ dans (X, d_X) et $\lim y_n = \bar{y}$ dans (Y, d_Y).

On a donc une bonne compréhension de la notion de convergence dans $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$. La question que l'on peut se poser est de savoir ce qu'il se passe si on change la norme considérée dans la définition ci-dessus. La réponse à cette question est apportée par le résultat suivant.

Proposition 2.1.3. *Soit X un ensemble et d_1 et d_2 deux distances équivalentes sur X. Soit (x_n) une suite de X et $\ell \in X$. On a alors*

$$\lim x_n = \ell \textit{ dans } (X, d_1) \textit{ si et seulement si } \lim x_n = \ell \textit{ dans } (X, d_2).$$

Démonstration. Les deux distances étant équivalentes il existe A et $B > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$ $Ad_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Bd_1(x, y)$. Ainsi si $\lim x_n = \ell$ dans (X, d_1), on a $0 \leq d_2(x_n, \ell) \leq Bd_1(x_n, \ell)$ le terme de droite tend vers 0 donc par encadrement $\lim d_2(x_n, \ell) = 0$ et $\lim x_n = \ell$ dans (X, d_2). En échangeant les rôles joués par d_1 et d_2, on obtient l'autre implication. □

La notion de convergence d'une suite ne dépend donc pas du choix entre deux distances équivalentes. Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, l'interprétation de la convergence que l'on a obtenue pour $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est valable pour toute autre norme $\|\cdot\|$: une suite de $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|)$ converge si et seulement si les suites de ses coordonnées convergent.

Remarque. Établissons aussi une propriété de la distance par rapport à la convergence des suites. Soit (x_n) un suite de (X, d) qui converge vers ℓ et $p \in X$, la seconde inégalité triangulaire permet d'écrire

$$|d(x_n, p) - d(\ell, p)| \leq d(x_n, \ell)$$

et, comme $d(x_n, \ell) \to 0$, on a $\lim d(x_n, p) = d(\ell, p)$.

On dit qu'une suite est bornée si il existe $p \in X$ et $r \in \mathbb{R}_+$ telle que $x_n \in B(x, r)$. Remarquons que toute suite convergente est bornée.

Dans un espace vectoriel normé, on peut agir sur les suites par combinaison linéaire.

Proposition 2.1.4. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, (x_n) et (y_n) deux suites de E telles que $\lim x_n = \bar{x}$ et $\lim y_n = \bar{y}$. Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{k}$ telle que $\lim \lambda_n = \bar{\lambda}$, on a alors*

$$\lim \lambda_n x_n + y_n = \bar{\lambda}\bar{x} + \bar{y}$$

Démonstration. Comme $\lim \lambda_n = \bar{\lambda}$, la suite (λ_n) est bornée par M. On a

$$\begin{aligned} 0 \leq \|(\lambda_n x_n + y_n) - (\lambda\bar{x} + \bar{y})\| &= \|(\lambda_n x_n - \bar{\lambda}\bar{x}) + (y_n - \bar{y})\| \\ &\leq \|\lambda_n(x_n - \bar{x}) + (\lambda_n - \lambda)\bar{x}\| + \|y_n - \bar{y}\| \\ &\leq |\lambda_n|\|x_n - \bar{x}\| + |\lambda_n - \lambda|\|\bar{x}\| + \|y_n - \bar{y}\| \\ &\leq M\|x_n - \bar{x}\| + |\lambda_n - \lambda|\|\bar{x}\| + \|y_n - \bar{y}\| \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 par hypothèse donc par encadrement $\lim\|(\lambda x_n + y_n) - (\lambda\bar{x} + \bar{y})\| = 0$ et $\lim \lambda x_n + y_n = \lambda\bar{x} + \bar{y}$ □

2.2 Parties ouvertes et parties fermées

Définition 2.2.1. Soit (X, d) un espace métrique, une partie U de X est dite *ouverte* si, pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Une partie F de X est dite *fermée* si son complémentaire $X \setminus F$ est ouvert.

Il est important de noter que ces notions sont relatives à l'espace métrique (X, d). Ainsi si une partie de X est ouverte (resp. fermée) on dira que c'est un ouvert (resp. fermé) de X.

Proposition 2.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes*

- *Le vide et X sont des ouverts de X.*
- *Une réunion d'ouverts de X est un ouvert de X.*
- *Une intersection* ***finie*** *d'ouverts de X est un ouvert de X.*

Concernant les fermés de X, on a

- *Le vide et X sont des fermés de X.*
- *Une intersection de fermés de X est un fermé de X.*
- *Une réunion* ***finie*** *de fermés de X est un fermé de X.*

Démonstration. La première propriété concernant les ouverts est évidente. Pour la seconde, considérons $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de X et $V = \cup_{i\in I} U_i$. Soit $x \in V$, il existe donc $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U_{i_0}$. Ainsi $B(x,r) \subset U_{i_0} \subset V$. Donc V est un ouvert de X.

Soit $(U_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'ouverts de X, on pose $V = \cap_{1\leq k\leq n} U_k$. Soit $x \in V$. On a alors $x \in U_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$. Comme les U_k sont ouverts il existe alors $r_k > 0$ tels que $B(x,r_k) \subset U_k$. Posons $s = \min_{1\leq k\leq n} r_k > 0$, on a alors $B(x,s) \subset B(x,r_k) \subset U_k$ pour tout k donc $B(x,s) \subset \cap_{1\leq k\leq n} U_k = V$ et V est un ouvert.

Pour les fermés les propriétés s'en déduise en se souvenant que $X\setminus\emptyset = X$, $X\setminus X = \emptyset$, $X \setminus (\cap_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I}(X \setminus A_i)$ et $X \setminus (\cup_{i\in I} A_i) = \cap_{i\in I}(X \setminus A_i)$. □

Il est temps de donner un premier exemple d'ensemble ouvert

Proposition 2.2.3. *Soit (X,d) un espace métrique, une boule ouverte $B(x,r)$ est un ouvert de X.*

Démonstration. Soit $y \in B(x,r)$, on a $d(x,y) < r$ posons alors $s = r - d(x,y) > 0$. Soit $z \in B(y,s)$. On a alors $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + s = r$. Donc $z \in B(x,r)$. Ainsi $B(y,s) \subset B(x,r)$. $B(x,r)$ est bien un ouvert de X. □

Exemple. Regardons quelques exemples dans $\mathbb{R}$. Un intervalle ouvert $]a,b[$ $(a \leq b)$ est en fait la boule ouverte $B(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$ centrée en $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $\frac{b-a}{2}$. Donc un intervalle ouvert est un ouvert de $\mathbb{R}$.

On a aussi $]a,+\infty[= \cup_{b>a}]a,b[$ donc $]a,+\infty[$ est une union d'ouverts de $\mathbb{R}$ donc un ouvert de $\mathbb{R}$. De même, $]-\infty,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire d'un segment $[a,b]$? On a $\mathbb{R} \setminus [a,b] =]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$ donc $[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Notons aussi que $\mathbb{R} \setminus [a,+\infty[=]-\infty,a[$ est ouvert donc $[a,+\infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$, de même $]-\infty,b]$. Ainsi un intervalle fermé est un fermé de $\mathbb{R}$.

Que peut-on dire de $[a,b[$ $(a < b)$? Si $[a,b[$ est ouvert, il existe une boule centré en a contenu dans $[a,b[$: il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) =]a-r,a+r[\subset [a,b[$ et donc $a - \frac{r}{2} \in [a,b[$ ce qui est impossible donc $[a,b[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. Si $[a,b[$ est fermé $\mathbb{R} \setminus [a,b[=]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$ est un ouvert. Il existe donc une boule centré en b contenu dans $]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$: il existe $r > 0$ tel que $B(b,r) =]b-r,b+r[\subset]-\infty,a[\cup[b,+\infty[$ ce qui est impossible avec $a < b$. Donc $[a,b[$ n'est pas fermé. En conclusion $[a,b[$ n'est ni ouvert ni fermé de $\mathbb{R}$. Le même raisonnement montre que $]a,b[$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ et $[a,b]$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.

Il est important de donner une caractérisation des ensembles fermés qui est très utile en pratique.

Proposition 2.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique, une partie F est fermée si et seulement si elle vérifie la propriété suivante : pour tout suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers $\bar{x}$ dans X, on a $\bar{x} \in F$.*

Autrement dit l'opération de passage à la limite ne permet pas de sortir de F, c'est en ce sens que F est « fermée ». Cette caractérisation séquentielle peut être prise comme une définition alternative du caractère fermé.

Démonstration. Supposons F fermé et considérons une suite (x_n) d'éléments de F et telle que $\lim x_n = \bar{x} \in X$. Supposons par l'absurde que $\bar{x} \in X \setminus F$. Comme $X \setminus F$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(\bar{x}, r) \subset X \setminus F$. Comme $x_n \in F$, on a donc $x_n \notin B(\bar{x}, r)$ et donc $d(x_n, \bar{x}) \geq r > 0$ ce qui contredit $\lim d(x_n, \bar{x}) = 0$. Donc $\bar{x} \in F$.

Réciproquement supposons que F vérifie la propriété séquentielle. Supposons par l'absurde que $X \setminus F$ n'est pas ouvert. Il existe donc $x \in X \setminus F$ tel que pour tout $r > 0$ $B(x, r) \not\subset X \setminus F$, autrement dit pour tout $r > 0$ $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$. Ainsi pour $r = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap F$. (x_n) est donc une suite d'éléments de F et $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim x_n = x$. Ainsi $x \in F$ par la propriété séquentielle ce qui contredit $x \in X \setminus F$. Donc $X \setminus F$ est ouvert et F est fermé. □

On va se servir de la caractérisation pour montrer le résultat suivant

Proposition 2.2.5. *Soit (X, d) un espace métrique, une boule fermée $\overline{B}(p, r)$ et une sphère $S(p, r)$ sont des fermés de X.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de $\overline{B}(p, r)$ qui converge vers $\bar{x} \in X$. On a $d(x_n, p) \leq r$ donc par passage à la limite $d(\bar{x}, p) \leq r$ et $\bar{x} \in \overline{B}(p, r)$: $\overline{B}(p, r)$ est fermé. Pour $S(p, r)$ on a $d(x_n, p) = r$ et donc par passage à la limite $d(\bar{x}, p) = r$ et $\bar{x} \in S(p, r)$. Ainsi $S(p, r)$ est fermé. □

Exemple. Ainsi pour $r = 0$, $\{x\} = B(x, 0)$ est un fermé.

Remarque. On a vu que la notion de convergence ne dépend pas du choix entre deux distances équivalentes. Ainsi d'après la caractérisation ci-dessus, changer une distance par une distance équivalente ne change pas les parties fermées ni les parties ouvertes.

Ainsi dans $\Bbbk^n$, les ouverts et les fermés ne dépendent pas du choix de la norme.

Remarque. Soit $F \subset \mathbb{R}$ une partie fermée et bornée. Comme F est bornée, $\alpha = \sup F$ est fini. Par définition de la borne supérieure pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in F$ tel que $\alpha - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \alpha$. Ainsi (x_n) est une suite de F qui converge vers α. Comme F est fermé, $\alpha \in F$.

On a donc montré que, si F est fermée et bornée dans $\mathbb{R}$, sa borne supérieure est contenue dans F : il s'agit donc d'un maximum. De même sa borne inférieure est un minimum.

2.3 Intérieur, adhérence, frontière

On a vu l'exemple de partie qui ne sont ni ouvertes ni fermés. Toutefois il est possible d'associer à toute partie de X une partie ouverte et une partie fermé de façon naturelle.

Définition 2.3.1. Soit A une partie de (X, d). On dira qu'un point $p \in X$ est *intérieur* à A si il existe $r > 0$ tel que $B(p, r) \subset A$. On appelle *intérieur* de A l'ensemble des points intérieurs à A. Il est noté $\overset{\circ}{A}$

Notons qu'un point intérieur à A appartient nécessairement à A puisque $p \in B(p, r)$. Ainsi l'intérieur de A est l'ensemble des points de A où la définition d'un ouvert s'applique. En fait on a la caractérisation suivante

Proposition 2.3.2. *Soit A une partie de (X, d). L'intérieur de A est un ouvert contenu dans A et c'est même le plus grand (au sens de l'inclusion) ouvert contenu dans A.*

Démonstration. Considérons $\mathcal{W} = \{U \subset X \mid U \subset A \text{ et ouvert}\}$. Notons que $\emptyset \in \mathcal{W}$. On pose alors $V = \cup_{U \in \mathcal{W}} U$. V est une réunion d'ouverts donc un ouvert de X, de plus $V \subset A$. V est le plus grand ouvert de X contenu dans A. Si $a \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$, donc $B(a, r)$ est un ouvert de X contenu dans A. Ainsi $B(a, r) \in \mathcal{W}$ et $a \in B(a, r) \subset V$: on a $\overset{\circ}{A} \subset V$. Si $a \in V$, V est un ouvert, il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V \subset A$ donc a est intérieur à A et $a \in \overset{\circ}{A}$: on a $V \subset \overset{\circ}{A}$. On a donc $V = \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. □

Ainsi si U est ouvert on a $\overset{\circ}{U} = U$. On peut faire une construction similaire pour trouver un fermé.

Définition 2.3.3. Soit A une partie de (X, d). On dira qu'un point $p \in X$ est *adhérent* à A si il existe une suite (x_n) de points de A tel que $p = \lim x_n$. On appelle *adhérence* de A l'ensemble des points adhérents à A. Elle est notée $\overline{A}$.

Notons qu'un point de A est adhérent à A, il suffit de considérer la suite constante. Ainsi l'adhérence de A est l'ensemble des points de X atteignables par passage à la limite.

Proposition 2.3.4. *Soit A une partie de (X, d). L'adhérence de A est un fermé contenant A et c'est même le plus petit fermé contenant A.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = \{G \subset X \mid A \subset G \text{ et fermé}\}$. Notons que $X \in \mathcal{G}$ et posons $F = \cap_{G \in \mathcal{G}} G$. F est une intersection de fermés donc un fermé de X, de plus $A \subset F$. F est le plus petit fermé contenant A. Si $a \in \overline{A}$, il existe (a_n) une suite de A donc de F convergent vers A, comme F est fermé $a \in F$. On a $\overline{A} \subset F$. Soit $a \in F$ et $r > 0$ notons que $F \setminus B(a, r) \subsetneq F$ et est fermé car $F \setminus B(a, r) = F \cap (X \setminus B(a, r))$ est l'intersection de deux fermés. Donc $A \not\subset F \setminus B(a, r))$. Comme $A \subset F$, il existe donc $x \in A \cap B(a, r)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in A \cap B(a, \frac{1}{n})$. Ainsi on a $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$ et $\lim x_n = a$. Donc a est adhérent à A et $F \subset \overline{A}$. On a donc $F = \overline{A}$ et $\overline{A}$ est un fermé. □

Ainsi si F est fermé, on a $\overline{F} = F$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, si $a < b$, on a : $[a, b]$, $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ ont pour intérieur $]a, b[$ et adhérence $[a, b]$.

Définition 2.3.5. Soit A une partie de (X,d). On appelle *frontière* de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Exemple. Dans un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, pour $p \in E$ et $r > 0$, l'adhérence de $B(p,r)$ est $\overline{B}(p,r)$ et l'intérieur de $\overline{B}(p,r)$ est $B(p,r)$. Ainsi la frontière de $B(p,r)$ ou $\overline{B}(p,r)$ est $S(p,r)$. Notons que $\overline{B}(p,r)$ est un fermé contenant $B(p,r)$ donc $\overline{B(p,r)} \subset \overline{B}(p,r)$. Soit $x \in \overline{B}(p,r)$, posons alors $x_n = p + (1-\frac{1}{n})(x-p)$. On a alors

$$\|x_n - p\| = \|(1-\frac{1}{n})(x-p)\| = (1-\frac{1}{n})\|x-p\| \leq (1-\frac{1}{n})r < r$$

Donc $x_n \in B(p,r)$ et $\|x - x_n\| = \|\frac{1}{n}(x-p)\| = \frac{1}{n}\|x-p\| \to 0$ donc $\lim x_n = x$ ainsi x est adhérent à $B(x,r)$. Donc $\overline{B}(p,r) \subset \overline{B(p,r)}$ donc $\overline{B}(x,r) = \overline{B(p,r)}$.

$B(p,r)$ est un ouvert contenu dans $\overline{B}(p,r)$ donc $B(p,r)$ est contenu dans l'intérieur de $\overline{B}(p,r)$. Soit $x \in S(p,r)$, pour $s > 0$ on pose $y = x + \frac{s}{2r}(x-p)$, on a alors $\|y - x\| = \|\frac{s}{2r}(x-p)\| = \frac{s}{2r}\|x-p\| = \frac{s}{2}$ donc $y \in B(x,s)$ et $\|y - p\| = \|(1+\frac{s}{2r})(x-p)\| = (1+\frac{s}{2r})\|x-p\| = r + \frac{s}{2}$ donc $y \notin \overline{B}(p,r)$. Ainsi on a montré que pour tout $s > 0$ $B(x,s) \not\subset \overline{B}(p,r)$. Ainsi aucun point de $S(p,r)$ n'est dans l'intérieur de $\overline{B}(p,r)$. Donc l'intérieur de $\overline{B}(p,r)$ est contenu dans $\overline{B}(p,r) \setminus S(p,r) = B(p,r)$. L'intérieur de $\overline{B}(p,r)$ est donc $B(p,r)$.

Dans le raisonnement ci-dessus, on a fortement utilisé le fait d'être dans un espace vectoriel normé. Dans un espace métrique général, on a juste des inclusions $\overline{B(p,r)} \subset \overline{B}(p,r)$ et $B(p,r) \subset \overset{\circ}{\widehat{\overline{B}(p,r)}}$.

Définition 2.3.6. Soit A une partie de (X,d). On dit que A est *dense* si $\overline{A} = X$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ est une partie dense, on a aussi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense.

Proposition 2.3.7. *Soit A une partie de (X,d). A est dense si et seulement si pour tout point p de X et tout $\varepsilon > 0$, $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons A dense, $p \in X$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{A} = X$, p est adhérent à A et il existe une suite (x_n) de A qui converge vers p. Ainsi pour n assez grand $x_n \in B(p,\varepsilon)$ ce qui donne bien $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.

Supposons que la propriété est vérifiée. Soit $p \in X$. Pour tout $n \geq 1$ on a $B(p, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ donc il existe $x_n \in B(p, \frac{1}{n}) \cap A$. (x_n) est ainsi une suite de A qui converge vers p. Ainsi p est adhérent à A et $\overline{A} = X$. □

Une autre terminologie que l'on peut rencontrer est la suivante.

Définition 2.3.8. Soit (X,d) un espace métrique et $A \subset X$. Un point $p \in A$ est dit *isolé* dans A si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $A \cap B(p,\varepsilon) = \{p\}$. La partie A est dite *discrète* si tous ses points sont isolés.

Remarque. En adaptant la preuve de la proposition 2.3.7, on peut montrer que p est isolé dans A si et seulement si $p \notin \overline{A \setminus \{p\}}$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, la partie $\mathbb{Z}$ est une partie discrète : en effet pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $\mathbb{Z} \cap B(n, \frac{1}{2}) = \mathbb{Z} \cap]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[= \{n\}$.

De même, la partie $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ est discrète dans $\mathbb{R}$. La preuve est laissée au lecteur.

2.4 Topologie induite

Soit (X, d) un espace métrique et Y une partie de X, on a vu que la restriction de d à Y définissait une métrique sur Y faisant de (Y, d) un espace métrique. On a aussi vu que les boules de Y étaient simplement l'intersection d'une boule de X avec Y. On peut se poser la question d'identifier les ouverts et les fermés de (Y, d) par rapport à ceux de (X, d). La réponse est donnée par le résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *Soit $(Y, d) \subset (X, d)$ comme ci-dessus. Soit $A \subset Y$ on a alors*

- *A est un ouvert de Y si et seulement si il existe un ouvert U de X tel que $A = Y \cap U$.*
- *A est un fermé de Y si et seulement si il existe un fermé F de X tel que $A = Y \cap F$.*

Démonstration. Pour la première affirmation, nous noterons B_X et B_Y les boules de X et Y. Ainsi on a $B_Y(p, r) = Y \cap B_X(p, r)$. Si A est un ouvert de Y, pour tout $a \in A$, il existe $r_a > 0$ tel que $B_Y(a, r_a) \subset A$. Ainsi on a

$$A = \bigcup_{a \in A} B_Y(a, r_a)$$

On définit alors $U \subset X$ par $U = \bigcup_{a \in A} B_X(a, r_a)$, U est une union d'ouverts donc un ouvert de X et

$$Y \cap U = Y \cap \big(\bigcup_{a \in A} B_X(a, r_a)\big) = \bigcup_{a \in A} \big(Y \cap B_X(a, r_a)\big) = \bigcup_{a \in A} B_Y(a, r_a) = A$$

Réciproquement soit U un ouvert de X, $A = Y \cap U$ et $a \in A$. On a $a \in U$ et comme U est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B_X(a, r) \subset U$. Donc $B_Y(a, r) = Y \cap B_X(a, r) \subset Y \cap U = A$ et A est bien ouvert.

La second affirmation se montre par un passage au complémentaire

$$\begin{aligned}
A \text{ est un fermé de } Y &\iff Y \setminus A \text{ est un ouvert de } Y \\
&\iff \text{il existe un ouvert } U \text{ de } X \text{ tel que } Y \setminus A = Y \cap U \\
&\iff \text{il existe un ouvert } U \text{ de } X \text{ tel que } A = Y \setminus (Y \cap U) \\
&\iff \text{il existe un ouvert } U \text{ de } X \text{ tel que } A = Y \cap (X \setminus U) \\
&\iff \text{il existe un fermé } F \text{ de } X \text{ tel que } A = Y \cap F
\end{aligned}$$

□

Remarque. Afin d'illustrer cela considérons $X = \mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}_+$. On a vu que l'intervalle $]-1, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $[0, 1[= \mathbb{R}_+ \cap]-1, 1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}_+$. Pour autant, $[0, 1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$.

Il est important de noter que les notions d'ouverts et de fermés sont relatives à l'espace métrique ambiant. Il faut toujours préciser ouvert de (X, d) ou fermé de (X, d) lorsqu'il peut y avoir une ambiguïté sur l'espace métrique.

Donnons un corollaire du résultat ci-dessus.

Corollaire 2.4.2. *Soit $(Y, d) \subset (X, d)$, on a alors*

- *Si Y est un ouvert de X, $A \subset Y$ est un ouvert de Y si et seulement si A est un ouvert de X.*

- *Si Y est un fermé de X, $A \subset Y$ est un fermé de Y si et seulement si A est un fermé de X.*

Exemple. Décrivons un autre exemple. Soit $Y = \{0, 1\} \subset X = \mathbb{R}$. Ici $\emptyset$, Y, $\{0\}$ et $\{1\}$ sont des fermés de Y. Par passage au complémentaire ce sont aussi tous des ouverts de Y.

2.5 Les sous-groupes de $\mathbb{R}$

Dans cette partie nous allons obtenir un résultat sur les sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$. Dans $\mathbb{R}$, des exemples de sous-groupes sont $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Les deux derniers exemples sont denses dans $\mathbb{R}$ en fait on a le résultat suivant qui affirme que cette densité est un phénomène courant.

Théorème 2.5.1. *Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On a alors l'alternative suivante*

- *soit il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$,*

- *soit G est dense dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Si $G = \{0\}$, on a $G = 0\mathbb{Z}$. Si $G \neq \{0\}$, on a $G \cap \mathbb{R}_+^* \neq \emptyset$ et on définit alors $a = \inf G \cap \mathbb{R}_+^*$. On va montrer que

- soit $a > 0$ et $G = a\mathbb{Z}$,

- soit $a = 0$ et G est dense.

Supposons $a > 0$ et montrons que $a \in G$. Comme $a > 0$, la définition de a montre qu'il existe $x \in G$ tel que $a \leq x < 2a$. Supposons par l'absurde que $x > a$, il existe alors $y \in G$ tel que $a \leq y < x$. Ainsi $x - y \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ et $x - y < a$; ceci contredit la définition de a. Ainsi $x = a$ et $a \in G$. On a donc $a\mathbb{Z} \subset G$. On va montrer l'autre inclusion.

Considérons $x \in G$. Posons $k = E(\frac{x}{a})$ (E désigne la partie entière). Ainsi $k \leq \frac{x}{a} < k + 1$ et donc $ka \leq x < (k + 1)a$ ou encore $0 \leq x - ka < a$. Comme $x - ka \in G$, la définition de a donne $x - ka = 0$ et donc $x = ka \in a\mathbb{Z}$. Ainsi $G = a\mathbb{Z}$.

Supposons $a = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et fixons $\varepsilon > 0$, nous allons montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $|x - g| \leq \varepsilon$. Par définition de a, il existe $y \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $y \leq \varepsilon$. On pose alors $k = E(\frac{x}{y})$ ainsi $k \leq \frac{x}{y} < k + 1$ ou encore $0 \leq x - ky \leq y \leq \varepsilon$. Ainsi $g = ky \in G$ vérifie la propriété et G est dense. $\square$

Remarque. On va maintenant montrer une conséquence de ce résultat :

$$\text{L'ensemble } A = \{\sin(n), n \in \mathbb{Z}\} \text{ est dense dans } [-1, 1]$$

Notons tout d'abord que $A = \{\sin(n + 2m\pi), n, m \in \mathbb{Z}\}$. On définit alors $G = \{n + 2m\pi, (n, m) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ qui est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. On va montrer que G est dense. Si ce n'est pas le cas le théorème ci-dessus permet d'affirmer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $G = a\mathbb{Z}$. Comme $1 \in G$ et $2\pi \in G$, il existe deux entiers q, p tel que $1 = aq$ et $2\pi = ap$. Ainsi $2\pi = \frac{p}{q}$ ou encore $\pi = \frac{p}{2q} \in \mathbb{Q}$. Or on sait que π n'est pas rationnel. Donc G est dense.

Considérons alors $x \in [-1, 1]$, il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin\theta$. Comme G est dense il existe une suite (g_k) de G qui converge vers θ et, par continuité de sin, on a $\lim \sin(g_n) = \sin(\theta) = x$. Comme $\sin(g_n) \in A$, x est bien adhérent à A et $\overline{A} = [-1, 1]$.

2.6 Espace topologique

On a dit que ce cours se focalise sur la topologie des espaces métriques (et même des parties d'espaces vectoriels normés). Toutefois la notion de topologie est plus vaste et, pour la culture générale, il peut être bon de donner la définition générale de topologie sur un espace.

On a vu que pour un espace métrique la distance permet de définir la notion de partie ouverte. La définition générale de topologie consiste précisément à se donner directement les parties ouvertes. Plus précisément, on a

Définition 2.6.1. Soit X un ensemble, on appelle *topologie* sur X un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X (appelées *parties ouvertes* de X) qui vérifie les propriétés suivantes

- Le vide et X sont des ouverts de X.
- toute réunion d'ouverts de X est un ouvert de X.
- toute intersection finie d'ouverts de X est un ouvert de X.

Le couple $(X, \mathcal{O})$ est alors appelé *espace topologique*.

Si (X, d) est un espace métrique, la proposition 2.2.2 permet d'affirmer que l'ensemble des ouverts de (X, d) est une topologie sur X.

Si $(X, \mathcal{O})$ est un espace topologique, on dit qu'une partie F de X est un fermé de $(X, \mathcal{O})$ si $X \setminus F$ est un ouvert, *i.e.* un élément de $\mathcal{O}$. Les fermés de X vérifient les propriétés de la proposition 2.2.2.

En conséquence, tous les concepts que nous allons introduire dans la suite qui ne font appel qu'aux notions d'ouvert et de fermé peuvent être généralisées dans le cadre des espaces topologiques.

Chapitre 3

Continuité

3.1 Applications continues

Dans ce chapitre nous considérons deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) et des applications $f : A \subset (X, d) \to (Y, \delta)$. Nous allons généraliser la notion de continuité connue pour des fonctions de la variable réelle à valeur réelle ou complexe.

Définition 3.1.1. Soit $f : A \subset (X, d) \to (Y, \delta)$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in Y$. On dit que f *a pour limite* ℓ en a ou *tend vers* ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in A,\ d(x, a) \leq \eta \implies \delta(f(x), \ell) \leq \varepsilon$$

On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$.

Notons que l'on peut réécrire l'implication $x \in \overline{B}_X(a, \eta) \implies f(x) \in \overline{B}_Y(\ell, \varepsilon)$. On peut aussi utiliser des inégalités strictes dans la définition.

On peut aussi donner une caractérisation séquentielle de la convergence.

Proposition 3.1.2. *Soit $f : A \subset (X, d) \to (Y, \delta)$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in Y$. f a pour limite ℓ en a si et seulement si pour toute suite (x_n) de A convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.*

Démonstration. Supposons $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Soit (x_n) une suite de A telle que $\lim x_n = a$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in A$, $d(x, a) \leq \eta \implies \delta(f(x), \ell) \leq \varepsilon$. Comme $\lim x_n = a$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, a) \leq \eta$ pour $n \geq n_0$. Ainsi pour $n \geq n_0$, $\delta(f(x_n), \ell) \leq \varepsilon$. On a bien $\lim f(x_n) = \ell$; la caractérisation séquentielle est vérifiée

Supposons que ℓ ne soit pas la limite de f en a. On a alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x \in A,\ d(x, a) \leq \eta \text{ et } \delta(f(x), \ell) \geq \varepsilon$$

Ainsi, pour $\eta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in A$ tel que $d(x_n, a) \leq \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), \ell) \geq \varepsilon$. Ainsi $\lim x_n = A$ et $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ ; la caractérisation séquentielle n'est pas vérifiée. $\square$

Définition 3.1.3. Soit $f : A \subset (X,d) \to (Y,\delta)$ une application et $a \in A$. On dit que f est continue en a si $\lim_a f = f(a)$. On dit que f est continue si f est continue en a pour tout $a \in A$.

Remarque. Notons que, dans la définition ci-dessus, si on munit A de la métrique d_A induite de d, on a $f : A \subset (X,d) \to (Y,\delta)$ est continue si et seulement si $f : (A, d_A) \to (Y,\delta)$ est continue. Ainsi on pourra toujours supposer que f est définie sur tout X.

Ainsi la continuité en a s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in X,\ d(x,a) < \eta \implies \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$$

On a aussi une traduction séquentielle de la continuité.

Proposition 3.1.4. *L'application $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ est continue en $a \in X$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de X convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

La notion de continuité possède aussi une caractérisation en termes d'ouverts et fermés.

Proposition 3.1.5. *Soit $f : (X,d) \to (Y,\delta)$ une application. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) f est continue

(ii) pour tout ouvert U de Y, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

(iii) pour tout fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.

Démonstration. Montrons $(i) \implies (ii)$. Soit U un ouvert de Y et $x \in f^{-1}(U)$. U est un ouvert et $f(x) \in U$, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(x),\varepsilon) \subset U$. f est continue il existe donc η tel que pour $f(B(x,\eta)) \subset B(f(x),\varepsilon) \subset U$. Ainsi $B(x,\eta) \subset f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(U)$ est bien ouvert.

Montrons $(ii) \implies (i)$. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, $B(f(x),\varepsilon)$ est un ouvert donc $f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ est un ouvert de X qui contient x. Il existe donc $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))$ ou encore $f(B(x,\eta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Donc f est continue en x et donc sur X.

Pour montrer $(ii) \iff (iii)$, on utilise $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$. □

Remarque. Les ensembles ouverts étant les mêmes en changeant une distance par une distance équivalente, les applications continues sont inchangées si on remplace (à la source comme au but) la distance par une distance équivalente.

Une conséquence est le résultat suivant.

Corollaire 3.1.6. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$*

- $A_\alpha = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) > \alpha\}$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*.*
- $B_\alpha = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) \geq \alpha\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$*.*
- $C_\alpha = \{p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) = \alpha\}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$*.*

3.2 Exemples d'applications continues

3.2.1 Applications lipschitziennes

Une application $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ est dite *lipschitzienne* si il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall p, q \in X, \quad \delta(f(p), f(q)) \leq kd(p, q)$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne. Dans le cas des espaces vectoriels normés, l'inégalité se réécrit

$$\|f(p) - f(q)\|_Y \leq k\|p - q\|_X$$

Proposition 3.2.1. *Toute application $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ lipschitzienne est continue.*

Démonstration. Soit $x \in X$ et (x_n) une suite de X convergeant vers x. On a alors $0 \leq \delta(f(x_n), f(x)) \leq kd(x_n, x)$ et le terme de droite tend vers 0 donc par encadrement $\lim \delta(f(x_n), f(x)) = 0$ et $\lim f(x_n) = f(x)$. f est donc continue en x et donc sur X. $\square$

Exemple. Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $|f'(t)| \leq k$ pour tout t, le théorème des accroissements finis permet d'affirmer que $|f(t) - f(s)| \leq k|t - s|$. f est donc k-lipschitzienne.

Exemple. Soit (X, d) un espace métrique, on munit alors $X \times X$ de la distance produit notée D. L'application distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est 2-lipschitzienne. En effet pour (a_1, b_1) et $(a_2, b_2) \in X \times X$, on a

$$\begin{aligned}
|d(a_1, b_1) - d(a_2, b_2)| &= |d(a_1, b_1) - d(a_1, b_2) + d(a_1, b_2) - d(a_2, b_2)| \\
&\leq |d(a_1, b_1) - d(a_1, b_2)| + |d(a_1, b_2) - d(a_2, b_2)| \\
&\leq d(b_1, b_2) + d(a_1, a_2) \\
&\leq 2 \max\{d(a_1, a_2), d(b_1, b_2)\} = 2D\big((a_1, b_1), (a_2, b_2)\big)
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction distance est continue.

3.2.2 Composition

Proposition 3.2.2. *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ et $g : (Y, \delta) \to (Z, D)$ des applications et $x \in X$. Si f est continue en x et g est continue en $f(x)$, alors $g \circ f$ est continue en x.*

On pourra donc retenir que la composée d'applications continues est continue.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de X avec $\lim x_n = x$. Comme f est continue en x, on a $\lim f(x_n) = f(x)$ et comme g est continue en $f(x)$ on a $\lim g \circ f(x_n) = \lim g(f(x_n)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Donc $g \circ f$ est bien continue en x. □

3.2.3 Continuité et coordonnées

Soit (Y_1, δ_1) et (Y_2, δ_2) deux espaces métriques et D la distance produit sur $Y_1 \times Y_2$.

Proposition 3.2.3. *Avec les notations ci-dessus, soit $f = (f_1, f_2) : (X, d) \to (Y_1 \times Y_2, D)$ une applications et $x \in X$. f est continue en x si et seulement si f_1 et f_2 sont continues en x.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de X avec $\lim x_n = x$. On a $f(x_n) = (f_1(x_n), f_2(x_n))$ et pour la distance produit

$$\lim f(x_n) = f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \iff \lim f_1(x_n) = f_1(x) \text{ et } \lim f_2(x_n) = f_2(x)$$

Ceci donne le résultat. □

Exemple. Si $f = (f_1, \dots, f_n) : (X, d) \to \Bbbk^n$ est une application, f est continue si et seulement si les f_i sont continues.

3.2.4 Somme et produit

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, considérons

$$S : \begin{array}{ccc} \Bbbk \times E \times E & \to & E \\ (\lambda, x, y) & \mapsto & \lambda x + y \end{array}$$

S est continue. Il s'agit d'une conséquence de la Proposition 2.1.4.

Si $(E, \|\cdot\|)$ est de plus une algèbre et $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre, on considère

$$P : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x \times y \end{array}$$

P est alors une application continue. En effet si $\lim(x_n, y_n) = (x, y)$, on a $\lim x_n = x$ et $\lim y_n = y$. Ainsi (x_n) est une suite bornée, soit M tel que $\|x_n\| \le M$. Ainsi en utilisant que $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre on a

$$\begin{aligned} \|x_n y_n - xy\| = \|x_n(y_n - y) + (x_n - x)y\| &\le \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \\ &\le \|x_n\|\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \\ &\le M\|y_n - y\| + \|x_n - x\|\|y\| \end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 donc $\lim x_n y_n = xy$.

En utilisant ces résultats et ceux des sections précédentes, on pourra retenir que la somme et le produit d'applications continues définissent des applications continues.

3.2.5 Projections

Soit (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espace métriques et D la distance produit sur $X_1 \times X_2$.

$$\pi_i : \begin{array}{ccc} X_1 \times X_2 & \to & X_i \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_i \end{array}$$

Alors π_i est continue. En effet si $p^n = (x_1^n, x_2^n)$ est une suite de $X_1 \times X_2$ qui converge vers $p = (x_1, x_2)$, on a $\lim \pi_i(p^n) = \lim x_i^n = x_i$ par définition de la distance produit.

3.2.6 Un exemple

Une combinaison des résultats ci-dessus permet de montrer que de nombreuses applications sont continues. Considérons

$$f = (f_1, f_2) : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (\cos(xy), x^2 + 3z) \end{array}$$

Montrons que f est continue. D'après la section 3.2.3, il suffit de montrer que f_1 et f_2 sont continues. D'après la section 3.2.5, l'application $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ est continue. En la composant (Proposition 3.2.2) avec l'application produit (Section 3.2.4) on obtient que $(x, y, z) \mapsto xy$ est continue. La fonction cos est continue car lipschitzienne. Donc à nouveau par composition, $f_1 : (x, y, z) \mapsto \cos(xy)$ est continue. On peut procéder de même pour f_2 où on sera amené à considérer l'application S de la section 3.2.4.

On sait que f_1 est continue, donc on sait que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ainsi : $f_1^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \cos(xy) < \frac{1}{2}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ pour lequel il n'est pas évident de déterminer des boules contenues à l'intérieur autour de chaque point.

Considérons maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \sqrt{2 - \cos(xy)}$. Par les mêmes considérations que précédemment l'application $(x, y) \mapsto 2 - \cos(xy)$ est continue et **à valeur dans** $\mathbb{R}_+$. La fonction $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; t \mapsto \sqrt{t}$ est continue donc f est continue comme composé d'application continue. Il est important dans le raisonnement ci-dessus de bien remarquer que $2 - \cos(xy)$ est à valeur dans $\mathbb{R}_+$ sur lequel $\sqrt{\cdot}$ est définie et continue.

Dans un cas général, les raisonnements ci-dessus permettent de montrer qu'une grande classe d'applications sont continues comme composée, somme, produit de fonctions élémentaires continues. Le point important est justement de vérifier que ces règles s'appliquent : on est dans les bons ensembles de continuité.

3.3 Applications linéaires continues

Nous allons étudier la continuité d'une classe particulière d'applications : les applications linéaires.

3.3.1 Critère de continuité et norme subordonnée

Théorème 3.3.1. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $L : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *L est continue*

(ii) *L est continue en 0*

(iii) *il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.*

(iv) *L est lipschitzienne.*

Démonstration. Les implications $(iv) \implies (i) \implies (ii)$ sont déjà connues. Montrons $(ii) \implies (iii)$. Nous allons écrire la continuité de L en 0 pour $\varepsilon = 1$: il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}_E(0, \eta)$, $L(x) \in \overline{B}_F(L(0), 1) = \overline{B}_F(0, 1)$. On va montrer que pour tout $x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$. Soit $x \in E$, si $x = 0$ on a $L(x) = 0$ donc l'inégalité est vérifiée. Si $x \neq 0$ on a $\|\eta \frac{x}{\|x\|_E}\|_E = \eta$ donc

$$\|L(\eta \frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq 1 \iff \frac{\eta}{\|x\|_E}\|L(x)\|_F \leq 1 \iff \|L(x)\|_F \leq \frac{1}{\eta}\|x\|_E$$

et l'inégalité est satisfaite.

Pour $(iii) \implies (iv)$, il suffit d'écrire $\|L(x)-L(y)\|_F = \|L(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E$. $\square$

On voit donc que l'étude de la continuité d'une application repose sur la preuve d'une majoration linéaire de la norme de $L(x)$ par celle de x. On voit aisément que l'ensemble des constantes C possibles est un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où a est la meilleure. Ceci amène à la définition suivante.

Définition 3.3.2. Soit $L : E \to F$ une application linaire continue entre deux espaces vectoriels normés. On appelle *norme subordonnée* de L le nombre

$$\begin{aligned}
|||L||| &= \min\{C \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x \in E,\ \|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E\} \\
&= \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} \\
&= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|L(x)\|_F \\
&= \sup_{\|x\|_E = 1} \|L(x)\|_F
\end{aligned}$$

Il est bon de vérifier que les quatre nombres définis ci-dessus sont bien égaux. Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 ces quatre nombres. On a pour tout $x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq C_1\|x\|_E$. Donc pour $x \neq 0$, $\frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C_1$. Ainsi $C_2 \leq C_1$. Si $\|x\|_E \leq 1$, on a $\|L(x)\|_F \leq \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq C_2$ donc $C_3 \leq C_2$. On a aussi $C_4 \leq C_3$. Enfin si $x \neq 0$, $\|\frac{x}{\|x\|_E}\|_E = 1$ donc $\|L(\frac{x}{\|x\|_E})\|_F \leq C_4$. Ainsi $\|L(x)\|_F \leq C_4\|x\|_E$. Donc $C_1 \leq C_4$. On a donc bien l'égalité.

Remarque. Notons qu'*a priori* on devrait noter $|||\cdot|||_{E,F}$ pour rappeler la dépendance en les normes de E et F.

On voit donc que si on est capable de montrer que $\|L(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, on a $|||L||| \leq C$. Par ailleurs si on trouve un vecteur $x \neq 0$ tel que $\|L(x)\|_F \geq C\|x\|_E$, on a $C \leq |||L|||$.

On peut aussi retenir que pour $x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq |||L|||\|x\|_E$. Notons aussi qu'en remplaçant les normes par des normes équivalentes, L reste continue mais on modifie la valeur de $|||L|||$.

Il est un cas où les applications linaires sont continues.

Théorème 3.3.3. *Toute application linaire $L : (\Bbbk^n, \|\cdot\|_\infty) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est continue.*

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\Bbbk^n$. Posons $C = \sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|_F$. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Bbbk^n$, on a ainsi

$$\begin{aligned}\|L(x)\|_F = \|L(\sum_{i=1}^n x_i e_i)\|_F = \|\sum_{i=1}^n x_i L(e_i)\|_F &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|L(e_i)\|_F \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|L(e_i)\|_F\right) \|x\|_\infty = C\|x\|_\infty\end{aligned}$$

□

Toute les normes étant équivalentes en dimension finie, on peut remplacer $(\Bbbk^n, \|\cdot\|_\infty)$ par n'importe quel espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie.

Exemple. Considérons L l'application $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la multiplication par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On est en dimension finie, on souhaite évaluer sa norme subordonnée. On a $L(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y)$. On a $|x + 2y| \leq |x| + 2|y| \leq 3\|(x, y)\|_\infty$. On a $|3x + 4y| \leq 3|x| + 4|y| \leq 7\|(x, y)\|_\infty$. Ainsi, on a

$$\|L(x)\|_\infty = \max\{|x + 2y|, |3x + 4y|\} \leq 7\|(x, y)\|_\infty$$

Ainsi $|||L||| \leq 7$. Notons aussi que, pour le vecteur $(1, 1)$, on a $L(1, 1) = (3, 7)$ et donc $\|(1, 1)\|_\infty = 1$ et $\|L(1, 1)\|_\infty = 7$. Donc $|||L||| \geq 7$. On a donc montré que $|||L||| = 7$.

Faisons le même travail pour $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned}\|L(x, y)\|_1 = |x + 2y| + |3x + 4y| \leq |x| + 2|y| + 3|x| + 4|y| = 4|x| + 6|y| \\ \leq 6(|x| + |y|) = 6\|(x, y)\|_1\end{aligned}$$

Ainsi $|||L|||_1 \leq 6$. Pour le vecteur $(0, 1)$, $L(0, 1) = (2, 4)$ donc $\|(0, 1)\|_1 = 1$ et $\|L(0, 1)\| = 6$. Ainsi $|||L|||_1 \geq 6$: finalement $|||L|||_1 = 6$.

Une conséquence de ce résultat est la proposition suivante.

Proposition 3.3.4. *Soit $F \subset \mathbb{k}^n$ un sous espace vectoriel. F est alors un fermé de $(\mathbb{k}^n, \|\cdot\|_\infty)$.*

Démonstration. Si F est de dimension p, il existe une application linéaire $L : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^{n-p}$ telle que $F = \ker L = L^{-1}(0)$. Comme L est linéaire, L est continue et $\{0\}$ est un fermé donc F est un fermé. □

À nouveau, on peut remplacer $\mathbb{k}^n$ par n'importe quel espace vectoriel normé de dimension finie.

3.3.2 Espace des applications linéaires continues

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. L'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ a aussi une structure d'espace vectoriel (on peut sommer deux applications linéaires et multiplier une application linéaire par un scalaire). Si $E = F$, $\mathcal{L}(E, E)$ a même une structure d'algèbre (on peut composer deux applications linéaires).

Si $E = \mathbb{k}^n$ et $F = \mathbb{k}^k$, on peut penser en terme matriciel, $\mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{k})$ est un espace vectoriel et $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ est une algèbre.

Si E et F sont des espaces vectoriels normés, on peut considérer le sous-espace vectoriel $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues (en dimension finie $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$). On a la propriété suivante

Proposition 3.3.5. *$|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. C'est même une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_c(E, E)$.*

Remarque. On voit donc que la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{L}_c(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{k})$ définie une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{k})$. On sait donc qu'une telle norme existe, il serait bon d'en expliciter la formule.

Démonstration. Tout d'abord on note que $|||\cdot|||$ est bien une application à valeur dans $\mathbb{R}_+$. Ensuite si $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$ est tel que $|||L||| = 0$, on a, pour $x \in E$, $\|L(x)\|_F \leq |||L|||\|x\|_E = 0$. Donc $L(x) = 0$ et L est l'opérateur nul.

Si $\lambda \in \mathbb{k}$ et $L \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a

$$|||\lambda L||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda|\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda||||L|||$$

Enfin si $L, G \in \mathcal{L}_c(E, F)$, on a pour $x \in E$

$$\|(L+G)(x)\|_F \leq \|L(x)\|_F + \|G(x)\|_F \leq |||L|||\|x\|_E + |||G|||\|x\|_E = (|||L||| + |||G|||)\|x\|_E$$

Ainsi $|||L+G||| \leq |||L||| + |||G|||$. On a donc montré que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Si $E = F$, on a pour $x \in E$

$$\|L \circ G(x)\|_E = \|L(G(x))\|_E \leq |||L|||\|G(x)\|_E \leq |||L||||||G|||\|x\|_E$$

Ainsi $|||L \circ G||| \leq |||L||||||G|||$ et $|||\cdot|||$ est bien une norme d'algèbre. □

3.4 Compléments

3.4.1 Homéomorphisme

On donne ici une notion fondamentale de la topologie.

Définition 3.4.1. Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application entre espaces métriques, on dit que f est un homéomorphisme si f est une bijection, continue et de réciproque f^{-1} continue.

Un homéomorphisme préserve les propriétés « topologiques » mais pas forcément les propriétés « métriques ». Notons par exemple que, si U est un ouvert de (X, d) et $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ est un homéomorphisme, $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ est alors un ouvert.

Exemple. Considérons l'application $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x$. On sait que f est continue et est une bijection dont la réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est aussi continue. f est donc un homéomorphisme.

On a donc que l'image d'un ouvert $]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est $f(]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[) =]1, +\infty[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. De même $(f(x_n))$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si (x_n) converge dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

En revanche, on constate que $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est borné alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

Une question très générale de topologie consiste à se demander si deux espaces (métriques) sont homéomorphes ou ne le sont pas et avoir des critères pour y répondre.

3.4.2 Continuité et densité

Notons que pour connaître une application continue sur un espace métrique il suffit de la connaître sur une partie dense.

Proposition 3.4.2. *Soit $f, g : (X, d) \to (Y, \delta)$ deux applications continues. Soit A une partie dense de X. Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, on a $f = g$.*

Démonstration. Soit $x \in X$. A étant dense il existe une suite (x_n) de A telle que $x = \lim x_n$. Comme $f = g$ sur A et f et g sont continues, on a $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$. Ainsi $f = g$. □

3.4.3 Un exemple

Pour finir le chapitre nous allons étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_\alpha(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)^\alpha}{y^2+(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Tout d'abord on constate que l'expression de f_α sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ est composée de sommes, produits et quotients de fonctions élémentaires continues (avec dénominateur non-nul). Ainsi f_α est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Pour étudier la continuité de f_α en $(0,0)$, on va distinguer plusieurs. Tout d'abord on va noter que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \frac{t}{t^2+1}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ (une simple étude de fonction permet de le montrer).

Le cas $\alpha > 1$**.** Dans ce cas, pour $(x,y) \neq (0,0)$ on peut majorer

$$\begin{aligned}|f_\alpha(x,y)| &= \frac{|y|(x^2+y^2)}{y^2+(x^2+y^2)^2}(x^2+y^2)^{\alpha-1} \\ &= \frac{\frac{|y|}{x^2+y^2}}{\left(\frac{|y|}{x^2+y^2}\right)^2+1}(x^2+y^2)^{\alpha-1} \\ &= g(\frac{|y|}{x^2+y^2})(x^2+y^2)^{\alpha-1} \leq \frac{1}{2}2^{\alpha-1}\|(x,y)\|_\infty^{2\alpha-2}\end{aligned}$$

Comme $2\alpha-2>0$ on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0 = f_\alpha(0,0)$ donc f_α est continue en $(0,0)$. Ainsi f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Le cas $\alpha \leq \frac{1}{2}$**.** Notons que si on calcule

$$f_\alpha(0,t) = \frac{t^{1+2\alpha}}{t^2+t^4} = \frac{t^{2\alpha-1}}{1+t^2}$$

Ainsi comme $2\alpha-1 \leq 0$, $\lim_{t\to0^+} f_\alpha(0,t) = +\infty$ si $\alpha < \frac{1}{2}$ et 1 si $\alpha = \frac{1}{2}$. Dans les deux cas f_α n'est pas continue en $(0,0)$.

Le cas $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$**.** Dans ce cas, on peut calculer pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $t \neq 0$

$$f_\alpha(t(x,y)) = \frac{t^{1+2\alpha}y(x^2+y^2)}{t^2y^2+t^4(x^2+y^2)^2} = \frac{t^{2\alpha-1}y(x^2+y^2)}{y^2+t^2(x^2+y^2)^2}$$

Ainsi $\lim_{t\to0} f_\alpha(t(x,y)) = 0 = f_\alpha(0,0)$. Ainsi, lorsque l'on approche l'origine $(0,0)$ de façon radiale, f_α tend bien vers $0 = f_\alpha(0,0)$.

Pour autant la fonction f_α n'est pas continue en $(0,0)$. En effet on a pour $t>0$,

$$f_\alpha(\sqrt{t},t) = \frac{t(t+t^2)^\alpha}{t^2+(t+t^2)^2} = \frac{t^{1+\alpha}(1+t)^\alpha}{t^2(2+2t+t^2)} = t^{\alpha-1}\frac{(1+t)^\alpha}{2+2t+t^2}$$

Comme $\alpha \leq 1$, on a $\lim_{t\to0^+} f_\alpha(\sqrt{t},t) = +\infty$ si $t<1$ et $\frac{1}{2}$ si $\alpha = 1$. Par ailleurs on a $\lim_{t\to0^+}(\sqrt{t},t) = (0,0)$, donc f_α n'est pas continue en $(0,0)$.

Chapitre 4

Compacité

4.1 Compacité et suite extraite

Commençons par rappeler une définition portant sur la notion de suite

Définition 4.1.1. Soit (x_n) une suite de X. On dit que (y_n) est une *sous-suite* ou *suite extraite* de (x_n) si il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_{\varphi(n)}$. L'application φ est appelée *extraction.*

On a alors le résultat suivant du cours de L2.

Théorème 4.1.2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite (x_n) de $\mathbb{R}$ bornée admet une sous-suite qui converge.*

La notion de compacité va étendre cette propriété à d'autres espaces. Commençons par une définition

Définition 4.1.3. Soit (x_n) une suite d'un espace métrique (X, d). On dit que $\alpha \in X$ est une valeur d'adhérence de (x_n) si il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers α.

Rappelons que si $\lim x_n = \ell$ alors, pour toute sous-suite $(x_{\varphi(n)})$, on a $\lim x_{\varphi(n)} = \ell$. Nous allons maintenant donner la définition principale de ce chapitre.

Définition 4.1.4. Un espace métrique (X, d) est *compact* si pour tout suite (x_n) de X, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente (dans X). Autrement dit, toute suite de X admet une valeur d'adhérence (propriété de Bolzano-Weierstrass).

Exemple. Le segment $[a, b]$ est un espace métrique compact. C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass : en effet une suite (x_n) de $[a, b]$ est bornée donc admet une valeur d'adhérence et comme $[a, b]$ est fermé cette valeur d'adhérence est forcément dans $[a, b]$.

En revanche, $[a, b[$ n'est pas un espace métrique compact. Par exemple la suite $(b - \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ n'admet pas de sous-suite convergente. En effet toute sous-suite converge vers b dans $\mathbb{R}$ mais $b \notin [a, b[$.

On sera souvent dans la situation où K est une partie d'un espace métrique (X, d). On dira alors que K est une partie compacte si l'espace métrique (K, d) est compact. L'un des objectifs de ce chapitre est de déterminer les parties compactes de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. La compacité est une propriété topologique : si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, X est compact si et seulement si Y l'est.

Proposition 4.1.5. *Soit (X, d) un espace métrique compact, alors X est borné.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que X n'est pas borné. Soit $p \in X$, cela implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in X$ tel que $d(x_n, p) \geq n$. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers a. On a donc $d(x_{\varphi(n)}, p) \to d(a, p)$ et $d(x_{\varphi(n)}, p) \geq \varphi(n) \to +\infty$. On a notre contradiction et donc X est bien borné. □

Une autre propriété des compacts est le résultat suivant.

Théorème 4.1.6. *Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$. On a les deux propriétés suivantes*

- *Si K est compacte, alors K est fermée dans X.*
- *Si (X, d) est compact et K est fermée dans X, alors K est compacte.*

Démonstration. Supposons K compacte. Soit (x_n) une suite de K qui converge vers $\bar{x} \in X$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in K$. Ainsi on a $\bar{x} = \lim x_{\varphi(n)} = a \in K$ et K est bien fermé.

Supposons (X, d) compact et K fermé. Soit (x_n) une suite de K. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de X qui converge vers $a \in X$. Comme K est fermé dans X, $a \in K$. Donc K est compact. □

Donnons quelques outils pour construire des compacts.

Proposition 4.1.7. *Soit (X, d) un espace métrique. On a les propriétés suivantes.*

- *Toute intersection de parties compactes (avec au moins un partie) est compacte.*
- *Toute réunion finie de parties compactes est compacte*

Démonstration. Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille non vide de parties compactes et notons $K = \bigcap_{i \in I} K_i$. Les K_i sont fermées dans X donc K est un fermé de X comme intersection de fermés. K est donc un fermé de K_{i_0} qui est compact donc K est compact.

Soit $(K_i)_{1 \leq i \leq k}$ une famille finie de parties compactes. Soit $K = \bigcup_{1 \leq i \leq k} K_i$ et considérons (x_n) une suite de K. Pour $1 \leq i \leq k$ on définit $I_i = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in K_i\}$. On a $\mathbb{N} = \cup_{1 \leq i \leq n} I_i$ donc il existe i_0 tel que I_{i_0} est infini. Ainsi $(x_n)_{n \in I_{i_0}}$ est une suite de K_{i_0} qui est compact. Il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in K_{i_0} \subset K$. K est donc compact. □

Proposition 4.1.8. *Soit $(X_i, d_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces métriques compacts. Alors $X_1 \times \cdots \times X_n$ muni de la distance produit est un espace métrique compact.*

Démonstration. Nous allons commencer par écrire la preuve pour $n = 2$. Soit donc (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques compacts et D la distance produit sur $X \times Y$. Soit $p_n = (x_n, y_n)$ une suite de $X \times Y$. Comme X est compact il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\bar{x} \in X$. $(y_{\varphi(n)})$ est alors une suite de Y qui est compact. Il existe donc une sous-suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge vers $\bar{y} \in Y$. On a $\lim x_{\varphi\circ\psi(n)} = \bar{x}$ donc $\lim p_{\varphi\circ\psi(n)} = (\bar{x}, \bar{y})$. Ainsi $(X \times Y, D)$ est bien compact.

Dans le cas général, on va faire une preuve par récurrence. Notons $Y_k = X_1 \times \cdots \times X_k$ et D_k la distance produit sur Y_k. Notons que $Y_{k+1} = Y_k \times X_{k+1}$ et que la distance produit D_{k+1} est la distance produit de D_k et d_{k+1}. On sait que Y_1 est compact. Supposons que (Y_k, D_k) est compact, comme (X_{k+1}, d_{k+1}) est compact et que le produit de deux compacts est compact, (Y_{k+1}, D_{k+1}) est compact. Ceci conclut la récurrence. □

On peut donc tirer une conclusion importante

Théorème 4.1.9. *Les parties compactes de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. On sait que toute partie compacte de $\mathbb{R}^n$ est fermée et bornée. Réciproquement on considère A une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$. Comme A est bornée, il existe M tel que $A \subset [-M, M]^n$. On rappelle que le segment $[-M, M]$ est un compact, donc $[-M, M]^n$ muni de la distance produit est compact. Cette distance produit correspond à la norme $\|\cdot\|_\infty$, donc $[-M, M]^n$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$. Ainsi A est une partie fermée de $[-M, M]^n$ qui est compact donc A est compact. □

Remarque. La notion de compacité ne dépend pas du choix entre des normes équivalentes. Donc quelque soit la norme sur $\mathbb{R}^n$ les parties compactes sont les mêmes.

Exemple. Ainsi dans $\mathbb{R}^n$, les boules fermées $\overline{B}(p, r)$ et les sphères $S(p, r)$ sont compactes.

Nous donnons maintenant un résultat

Proposition 4.1.10. *Soit (X, d) un espace métrique et $(F_n)_{n\in N}$ une suite de parties compactes non vides de X qui est décroissante pour l'inclusion ($F_{n+1} \subset F_n$). Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est non vide.*

Démonstration. Comme les F_n sont non vides on peut choisir $x_n \in F_n$. Comme la suite (F_n) est décroissante on a $x_n \in F_n \subset F_k$ pour $k \leq n$. Ainsi (x_n) est une suite de F_0 qui est compact. Il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\bar{x}$. Pour $k \leq n$ notons que $x_{\varphi(n)} \in F_k$, ainsi comme F_n est fermé, $\bar{x} \in F_k$. Ainsi $\bar{x} \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_k$ qui est non vide. □

Dans la section suivante on va voir une généralisation de cette propriété.

4.2 Compacité et recouvrement ouvert

Tout d'abord commençons pas une définition

Définition 4.2.1. Soit X un ensemble, on appelle *recouvrement* de X une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Si $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement, $J \subset I$ et $(A_i)_{i\in J}$ est un recouvrement, on dit que $(A_i)_{i\in J}$ est un *sous-recouvrement* ou un *recouvrement extrait* de $(A_i)_{i\in I}$

Exemple. Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $A_n =]n-1, n+1[$. On a $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ donc la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un recouvrement de $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'un espace métrique, on parle de recouvrement par des ouverts si tous les A_i sont des ouverts.

On a alors le résultat suivant qui donne une définition alternative de la compacité.

Théorème 4.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique, on a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) (X, d) *est compact*

(ii) De tout recouvrement de X par des ouverts il existe un sous-recouvrement fini (propriété de Borel-Lebesgue).

(iii) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de X d'intersection vide, il existe alors $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset$.

La preuve de ce résultat est longue et occupera la fin de cette section.

$(ii) \iff (iii)$

L'équivalence entre ces deux propriétés se fait essentiellement par un passage au complémentaire. Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X et $F_i = X \setminus U_i$ sont leurs complémentaires. Écrire $X = \cup_{i\in I} U_i$ est équivalent à écrire $\emptyset = X \setminus (\cup_{i\in I} U_i) = \cap_{i\in I}(X \setminus U_i) = \cap_{i\in I} F_i$. L'équivalence entre (ii) et (iii) s'en déduit.

$(iii) \implies (i)$

Afin de démontrer cette implication nous allons avoir besoin d'un résultat intermédiaire.

Lemme 4.2.3. *Soit (x_n) une suite de X. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $A_k = \{x_n; n \geq k\}$. On a alors*

$$\cap_{k\in\mathbb{N}} \overline{A_k} = \{\textit{valeur d'adhérence de la suite } (x_n)\}$$

Démonstration. Soit α une valeur d'adhérence de (x_n), il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\lim x_{\varphi(n)} = \alpha$. Notons que $(x_{\varphi(n)})_{n\geq k}$ est une suite de A_k donc $\alpha \in \overline{A_k}$ et donc dans l'intersection $\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$. Réciproquement si $\alpha \in \cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k}$. Construisons par récurrence une extraction $\varphi : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tel que $d(x_{\varphi(n)}, \alpha) \leq \frac{1}{n}$. On pose $\varphi(0) = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\varphi(k)$ construit pour $k \leq n$. On sait que $\alpha \in \overline{A_{\varphi(n)+1}}$ donc il existe $n_0 \geq \varphi(n) + 1$ tel que $d(x_{n_0}, \alpha) \leq \frac{1}{n+1}$. On pose alors $\varphi(n+1) = n_0$. φ est bien croissante et on a $d(x_{\varphi(n+1)}, \alpha) \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi $\lim x_{\varphi(n)} = \alpha$ et α est une valeur d'adhérence de (x_n). □

Soit (x_n) une suite de X et $A_k = \{x_n; n \geq k\}$. D'après la propriété (iii) si $\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k} = \emptyset$, il existe n_0 tel que $\emptyset = \cap_{0\leq k\leq n_0}\overline{A_k} = \overline{A_{n_0}}$. Or $A_{n_0} \neq \emptyset$. Donc $\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{A_k} \neq \emptyset$ et l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n) est non-vide : X est compact.

$(i) \implies (ii)$

On se donne $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement par des ouverts de X. Dans un premiers temps l'idée est de remplacer les U_i par des boules. On va montrer la propriété suivante.

Il existe $r > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, r) \in U_i$.

Supposons par l'absurde que la propriété n'est pas satisfaite. Ainsi pour $n \geq 1$, il existe x_n tel que $B(x_n, \frac{1}{n})$ n'est inclus dans aucun des U_i. D'après la propriété (i), il existe une sous-suite $x_{\varphi(n)}$ qui converge vers $\alpha \in X$. Comme $(U_i)_{i\in I}$ est un recouvrement il existe $i_0 \in I$ tel que $\alpha \in U_{i_0}$ et $r > 0$ tel que $B(\alpha, r) \subset U_{i_0}$. Comme $\lim x_{\varphi(n)} = \alpha$, pour n assez grand on a $d(x_{\varphi(n)}, \alpha) + \frac{1}{\varphi(n)} < r$ et donc

$$B(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(\alpha, d(x_{\varphi(n)}, \alpha) + \frac{1}{\varphi(n)}) \subset B(\alpha, r) \subset U_{i_0}$$

ce qui contredit la définition de (x_n). La propriété est donc démontrée.

Pour conclure on va montrer que l'on peut recouvrir X avec un nombre fini de boules de rayon r.

Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Construisons alors par récurrence une suite x_n vérifiant la propriété suivante $d(x_n, x_m) \geq r$ pour tout $n \neq m$. Fixons x_0 un point de X et pour $n \in \mathbb{N}$ supposons que la suite $(x_k)_{0\leq k\leq n}$ est construite. Nous avons fait l'hypothèse qu'il n'est pas possible de recouvrir X avec un nombre fini de boules de rayon r, donc il existe $x \in X$ qui n'est pas contenu dans $\cup_{1\leq k\leq n} B(x_k, r)$. Posons $x_{n+1} = x$, on a alors $x_{n+1} \notin B(x_k, r)$ pour $k \leq n$ donc $d(x_{n+1}, x_k) \geq r$. Nous avons donc construit notre suite.

D'après la propriété (i), il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers α. D'après l'inégalité triangulaire on peut alors écrire

$$r \leq d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n+1)}) \leq d(x_{\varphi(n)}, \alpha) + d(\alpha, x_{\varphi(n+1)})$$

Le terme de droite tend vers 0 ce qui nous donne une contradiction.

Ainsi il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $X \subset \cup_{1\le k\le n} B(x_k, r)$ et par choix de r, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_k, r) \subset U_{i_k}$. Ainsi $X \subset \cup_{1\le k\le n} U_{i_k}$: on a trouvé un sous-recouvrement fini.

4.3 Compacité et continuité

On commence par le résultat suivant

Proposition 4.3.1. *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application continue. Si $K \subset X$ est une partie compacte de X, $f(K)$ est une partie compacte de Y.*

Démonstration. Soit (y_n) une suite de $f(K)$, il existe alors $x_n \in K$ tel que $y_n = f(x_n)$. Comme K est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\lim x_{\varphi(n)} = \bar{x} \in K$. Comme f est continue, $\lim y_{\varphi(n)} = \lim f(x_{\varphi(n)}) = f(\bar{x}) \in f(K)$. Ainsi $f(K)$ est bien compact. □

Remarque. On rappelle qu'une application continue est caractérisée par le fait que l'image réciproque d'un fermé est un fermé. Ici on a une information sur l'image directe d'un compact.

Proposition 4.3.2. *Soit $f : (K, d) \to \mathbb{R}$ un fonction continue avec K compact non vide. Il existe alors $p, q \in K$ tel que, pour tout $x \in K$, $f(p) \le f(x) \le f(q)$*

Autrement dit une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes (son maximum et son minimum).

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $f(K)$ est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$, donc un fermé borné de $\mathbb{R}$ non vide. Ainsi la borne supérieure de $f(K)$, $\sup_K f$, est finie et appartient à $f(K)$: il existe $q \in K$ tel que $f(q) = \sup_K f = \max_K f$. De même pour la borne inférieure. □

Rappelons que la définition de la continuité pour $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ peut s'écrire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists \eta > 0,\ \forall y \in X,\ d(x, y) \le \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \le \varepsilon.$$

Autrement dit η peut dépendre de $x \in X$. Si on veut rendre η indépendant de x, on introduit la définition

Définition 4.3.3. Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application. On dit que f est *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in X,\ d(x, y) \le \eta \implies \delta(f(x), f(y)) \le \varepsilon$$

Une application uniformément continue est continue. Un exemple classique d'application uniformément continue est donnée par les application lipschitziennes. En effet si f est k-lipschitzienne ($k > 0$) et $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. Soit $x, y \in X$ avec $d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{k}$, on a alors

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k d(x, y) \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

D'autres exemples sont fournis par le résultat suivant.

Théorème 4.3.4 (Heine)**.** *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application continue. Si X est compact, f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \eta > 0,\ \exists x, y \in X,\ d(x, y) \leq \eta \text{ et } \delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ il existe x_n et $y_n \in X$ tel que $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ et $\delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$. Comme X est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\bar{x}$. On alors $d(y_{\varphi(n)}, \bar{x}) \leq d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, \bar{x}) \leq \frac{1}{\varphi(n)} + d(x_{\varphi(n)}, \bar{x})$ qui tend vers 0. Donc $\lim y_{\varphi(n)} = \bar{x}$. Comme f est continue, on a $\lim \delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) = \delta(f(\bar{x}), f(\bar{x})) = 0$ or ceci contredit $\delta(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \geq \varepsilon$. Ainsi f est bien uniformément continue. □

Exemple. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur le compact $[0, 1]$. Elle est donc uniformément continue. Toutefois elle n'est pas lipschitzienne.

4.4 Équivalence des normes

Nous allons enfin pouvoir démontrer le résultat suivant énoncé dans le premier chapitre

Théorème 4.4.1. *Soit E un espace vectoriel de* ***dimension finie****. Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Soit N une norme sur E et fixons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Définissons alors l'application linéaire L

$$L : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{array}$$

On sait que L est une bijection et L est continue pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (Théorème 3.3.3). Donc la fonction $f : x \mapsto N(L(x))$ est continue. On sait aussi que la sphère unité $S(0, 1)$ de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ est compact. Donc f est bornée et atteint ses bornes sur $S(0, 1)$: il existe a et $b \in S(0, 1)$ tels que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pour tout $x \in S(0, 1)$.

Comme L est injective $f(a) > 0$, ainsi il existe $A, B > 0$ tels que $A \leq N(L(x)) \leq B$ pour tout $x \in S(0,1)$ et donc

$$A\|x\|_\infty \leq N(L(x)) \leq B\|x\|_\infty \tag{4.1}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Si N' est une seconde norme, il existe aussi $A', B' > 0$ tels que

$$A'\|x\|_\infty \leq N'(L(x)) \leq B'\|x\|_\infty$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{A'}{B}N(L(x)) \leq A'\|x\|_\infty \leq N'(L(x)) \leq B'\|x\|_\infty \leq \frac{B'}{A}N(L(x))$$

Comme L est une bijection, on a pour tout $y \in E$

$$\frac{A'}{B}N(y) \leq N'(y) \leq \frac{B'}{A}N(y)$$

et donc N et N' sont équivalentes. □

Remarque. Comme L est bijective, l'équation (4.1) permet d'écrire $\|L^{-1}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{A}N(y)$. Ainsi, L^{-1} est continue. L défini donc un homéomorphisme (linéaire) entre $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ et (E, N). Comme conséquence, on obtient le résultat suivant qui est une généralisation de résultats démontrés pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Théorème 4.4.2. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. On a alors*

- *Une partie K de E est compacte si et seulement si K est fermée et bornée.*
- *Toute application linéaire $L : E \to (F, \|\cdot\|)$ est continue.*

Une conséquence du résultat ci-dessus est une généralisation de la proposition 3.3.4.

Proposition 4.4.3. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $F \subset E$ un sous espace vectoriel de dimension finie de E. Alors F est un fermé de E.*

Démonstration. Considérons (x_n) une suite de F qui converge vers $\bar{x} \in E$. Comme (x_n) converge (x_n) est bornée : on a $\|x_n\| \leq R$. C'est donc une suite de la boule fermée $\overline{B}_F(0, R)$ de $(F, \|\cdot\|)$. Cette boule est compacte il existe donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\bar{y} \in F$. On a alors $\bar{x} = \bar{y} \in F$ et F est bien fermé. □

4.5 L'ensemble de Cantor

Dans cette section nous allons décrire une partie compacte de $\mathbb{R}$ appelée ensemble (triadique) de Cantor. Cet ensemble a de très nombreuses propriétés, nous en décrirons certaines.

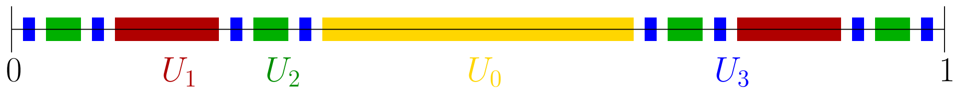

FIGURE 4.1 – Le complémentaire de l'ensemble de Cantor

FIGURE 4.2 –

Notons $t_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto x/3$ et $t_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto (2+x)/3$. Notons que $t_0([0,1]) = [0, \frac{1}{3}]$ et $t_2([0,1]) = [\frac{2}{3}, 1]$ ainsi $t_0([0,1])$ et $t_2([0,1])$ sont disjoints. De plus les t_i sont des homéomorphismes. On définit alors une application sur l'ensemble des parties de $[0,1]$:

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}([0,1]) & \longrightarrow & \mathcal{P}([0,1]) \\ A & \longmapsto & t_0(A) \cup t_2(A) \end{array}$$

On considère alors $U_0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ et on définit, par récurrence, (U_n) par $U_{n+1} = T(U_n)$. Par exemple, on a

$$\begin{aligned} U_1 &=]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\\ U_2 &=]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[\cup]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}[\cup]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}[\cup]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}[\end{aligned}$$

On pourra visualiser ces ensembles sur la Figure 4.1.

On définit alors l'ensemble de Cantor par

$$K = [0,1] \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n)$$

Nous allons étudier la nature de l'ensemble K que nous venons de construire. Tout d'abord, montrons par récurrence que les ensembles U_n sont tous des ouverts. $U_0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ est bien un ouvert. Si U_n est un ouvert, comme t_0 et t_2 sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t_0(U_n)$ est un ouvert et $t_2(U_n)$ est un ouvert donc $U_{n+1} = t_1(U_n) \cup t_2(U_n)$ est un ouvert. Ainsi $\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est un ouvert et $K = [0,1] \cap \big(\mathbb{R} \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} U_n)\big)$ est un fermé. $K \subset [0,1]$ est donc borné ; ainsi K est une partie compacte de $\mathbb{R}$.

Afin de mieux décrire K, nous allons présenter d'autres constructions de K. Posons $K_n = [0,1] \setminus (\cup_{k=0}^{n-1} U_k)$ de sorte que $K_{n+1} = K_n \setminus U_n$ et $K = \cap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Notons aussi que chaque K_n est une partie compacte de $\mathbb{R}$ (une représentation des K_n est visible dans la figure 4.2).

Montrons par récurrence que $K_{n+1} = T(K_n)$. Pour $n = 0$ on a $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 0] = T([0,1]) = T(K_0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $K_{n+1} = T(K_n)$, on a alors $K_{n+2} =$

$K_{n+1} \setminus U_{n+1} = T(K_n) \setminus T(U_n) = \big(t_0(K_n) \cup t_2(K_n)\big) \setminus \big(t_0(U_n) \cup t_2(U_n)\big)$. Comme $t_0([0,1])$ est disjoint de $t_2([0,1])$ et les t_i sont des bijections, on a

$$\begin{aligned}\big(t_0(K_n) \cup t_2(K_n)\big) \setminus \big(t_0(U_n) \cup t_2(U_n)\big) &= \big(t_0(K_n) \setminus t_0(U_n)\big) \cup \big(t_2(K_n) \setminus t_2(U_n)\big)\\ &= t_0(K_n \setminus U_n) \cup t_2(K_n \setminus U_n)\\ &= t_0(K_{n+1}) \cup t_2(K_{n+1}) = T(K_{n+1})\end{aligned}$$

Une première conséquence de cette propriété est la suivante : la mesure de Lebesgue de K est nulle. En effet on montre par récurrence que $\lambda(K_n) \leq (\frac{2}{3})^n$ (en fait on a égalité). On a $\lambda(K_0) = \lambda([0,1]) = 1$ et supposons pour $n \in \mathbb{N}$ que $\lambda(K_n) \leq (\frac{2}{3})^n$. On a alors

$$\begin{aligned}\lambda(K_{n+1}) = \lambda(T(K_n) = \lambda(t_0(K_n) \cup t_2(K_n)) &\leq \lambda(t_0(K_n)) + \lambda(t_2(K_n))\\ &\leq \frac{1}{3}(\lambda(K_n) + \lambda(K_n)) = \frac{2}{3}\lambda(K_n) \leq (\frac{2}{3})^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi $\lambda(K) = \lambda(\cap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = 0$

On va maintenant décrire précisément les éléments de K en terme d'écriture en base 3 (voir Annexe B). Notons A l'ensemble des nombres de $[0,1]$ dont qui peuvent s'écrire en base 3 uniquement avec les chiffres 0 et 2. Plus précisément, on a

$$A = \big\{ \sum_{i=1}^{\infty} x_i 3^{-i}; \forall i \geq 1 \ x_i \in \{0,2\} \big\}$$

Nous allons montrer que $A = K$. Comme conséquence cela implique que $K \neq \emptyset$.

Tout d'abord considérons $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ avec $a_1 \in \{0,2\}$ et $a_i \in \{0,1,2\}$ pour $i \geq 2$. On note note alors $b = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i}$. Si $a_1 = 0$, on a

$$a = \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i} = \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i} = t_0(b)$$

et, si $a_1 = 2$, on a

$$a = 2 \times 3^{-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i=2}^{\infty} a_i 3^{-i+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i} = t_2(b)$$

On a donc $a = t_{a_1}(b)$.

Montrons maintenant par récurrence que $A \subset K_n$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ puisque $A \subset [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $A \subset K_n$. Soit $a \in A$, $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ et $b = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} 3^{-i}$ comme ci-dessus. Notons que $b \in A \subset K_n$. On a alors $a = t_{a_1}(b) \in t_0(K_n) \cup t_2(K_n) = K_{n+1}$. Donc $A \subset K$.

Considérons maintenant $a \in [0,1]$ un nombre qui s'écrit, en base 3, $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$. On suppose qu'il existe i tel que $a_i = 1$ (sinon $a \in A$). On considère alors $i_0 = \min\{i \mid a_i = 1\}$. On va alors montrer que l'une des trois propriétés suivantes est vérifiées

- $a \in U_{i_0-1}$
- pour $i > i_0$, $a_i = 0$
- pour $i > i_0$, $a_i = 2$

Dans les deux derniers cas, on pourra donc réécrire a de sorte que $a \in A$. Posons $b = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i-1+i_0} 3^{-i}$. D'après les calculs faits plus haut, on a

$$a = t_{a_1} \circ \cdots \circ t_{a_{i_0-1}}(b)$$

On a alors $b = a_{i_0} 3^{-1} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1+i_0} 3^{-i} = \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1+i_0} 3^{-i}$ et comme $0 \leq a_i \leq 2$ on a

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} 0 \times 3^{-i} \leq b \leq \frac{1}{3} + \sum_{i=2}^{\infty} 2 \times 3^{-i} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Ainsi on a l'un des trois cas possibles

- $b \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[= U_0$ et $a \in T^{i_0-1}(U_0) = U_{i_0-1}$
- $b = \frac{1}{3}$ et $a_i = 0$ pour $i > i_0$
- $b = \frac{2}{3}$ et $a_i = 2$ pour $i > i_0$.

Dans le premier cas, on a $a \notin K$. Dans le deuxième cas, on a $a = \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i 3^{-i} + 0 \times 3^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2 \times 3^{-i} \in A$. Dans le dernier cas, on a $a = \sum_{i=1}^{i_0-1} a_i 3^{-i} + 2 \times 3^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 0 \times 3^{-i} \in A$. Ainsi on a montrer que si l'un des $a_i = 1$ on a soit $a \notin K$ soit $a \in A$. Donc $K \subset A$.

Deux propriétés que l'on peut établir sont

1. Pour tout $a \in K$, on a $a \in \overline{K \setminus \{a\}}$.
2. K est d'intérieur vide.

Pour la première, considérons $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i}$ avec $a_i \in \{0, 2\}$. Pour $n \geq 1$, posons

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + (2 - a_n) 3^{-n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i 3^{-i} \in A = K$$

On a $|a - a_n| = 2 \times 3^{-n}$ donc $a_n \in K \setminus \{a\}$ et $a_n \to a$.

Pour la seconde, considérons $a = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \in K$ avec $a_i \in \{0, 2\}$. Pour $n \geq 1$, posons alors

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i 3^{-i} + 1 \times 3^{-n} + 0 \times 3^{-n-1} + 2 \times 3^{-n-2} + \sum_{i=n+3}^{\infty} a_i 3^{-i}$$

D'après ce qui précède, on a $b_n \notin K$ et $|b_n - a| \leq 3^{-n} + 2(3^{-n-1} + 3^{-n-2}) \to 0$. Donc a est dans l'adhérence du complémentaire de K donc pas dans son intérieur : $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

On peut aussi dire que si son intérieur est non vide, K contient un intervalle ouvert I et donc sa mesure de Lebesgue est supérieure à $\lambda(I) \neq 0$. Or on sait que $\lambda(K) = 0$.

Chapitre 5

Convexité et connexité

5.1 Convexité

Définition 5.1.1. Soit E une espace vectoriel. Une partie C de E est dite *convexe* si pour tout $x, y \in C$ et $t \in [0,1]$, on a $tx + (1-t)y \in C$.

Remarque. L'ensemble $\{tx+(1-t)y, t \in [0,1]\}$ est appelé segment d'extrémités x et y, il est noté $[x, y]$. Ainsi, C est convexe si elle contient tous les segments dont les extrémités sont dans C (voir Figure 5.1).

Exemple. Dans $\mathbb{R}$, les parties convexes sont les intervalles. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$ et $t \in [0,1]$, on a $a \leq ta + (1-t)b \leq b$ donc $\{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\} \subset [a, b]$. Si $x \in [a, b]$, on a $a \leq x \leq b$ donc $t = \frac{b-x}{b-a} \in [0,1]$ et $x = \frac{b-x}{b-a}a + (1 - \frac{b-x}{b-a})b$ (le raisonnement est fait ici avec $a < b$, dans le cas $a = b$, $t = 0$ convient). Ainsi $[a, b] \subset \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$. On a donc montrer que $[a, b] = \{ta + (1-t)b, t \in [0,1]\}$.

Ainsi si I est un intervalle et $a, b \in I$ $(a \leq b)$, on a $\{ta+(1-t)b, t \in [0,1]\} = [a, b] \subset I$. Ainsi I est convexe. Si C est convexe et $a, b \in C$ on a $[a, b] = \{ta+(1-t)b, t \in [0,1]\} \subset C$. Ainsi si $a = \inf C$ et $b = \sup C$ (éventuellement avec $a = -\infty$ et $b = +\infty$), on a $C = [a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$ suivant que $a, b \in C$ ou $a, b \notin C$.

Les boules d'un espace vectoriel normé (ouvertes ou fermées) sont convexes. En effet,

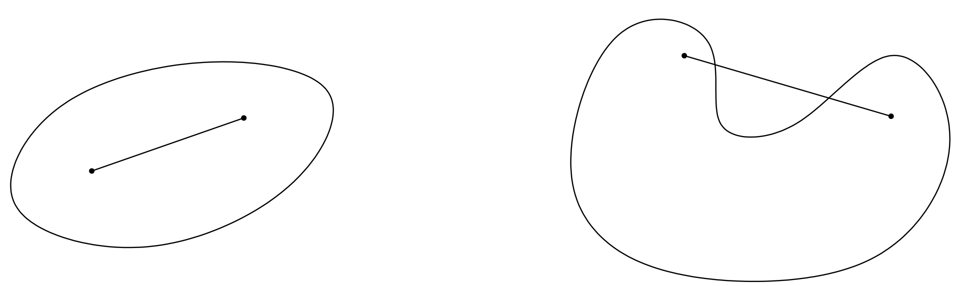

FIGURE 5.1 – Un exemple de partie convexe (à gauche) et non-convexe (à droite) de $\mathbb{R}^2$

si $a, b \in B(x,r)$, on a pour $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\|(ta+(1-t)b)-x\| = \|t(a-x)+(1-t)(b-x)\| &\leq t\|a-x\|+(1-t)\|b-x\| \\ &< tr+(1-t)r = r\end{aligned}$$

donc $ta+(1-t)b \in B(x,r)$.

Proposition 5.1.2. *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de convexes d'un espace vectoriel normé E. Alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.*

Démonstration. Soit $x, y \in C = \bigcap_{i\in I} C_i$ et $t \in [0,1]$, on a $x, y \in C_i$ et C_i est convexe. Donc $tx+(1-t)y \in C_i$ pour tout i. Ainsi $tx+(1-t)y \in \bigcap_{i\in I} C_i = C$. □

Ce résultat nous permet de poser la définition suivante.

Définition 5.1.3. Soit A une partie d'un espace vectoriel E et $\mathcal{C} = \{C \subset E \mid A \subset C \text{ et } C \text{ convexe}\}$. On appelle alors *enveloppe convexe* de A la partie

$$\operatorname{Conv}(A) = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$$

Il s'agit du plus petit (pour l'inclusion) convexe de E contenant A.

On pose aussi la définition.

Définition 5.1.4. Soit E un espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n, p \in E$. On dit que p est une *combinaison convexe* de $x_1, \ldots, x_n$ si il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $p = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

On a le résultat suivant

Proposition 5.1.5. *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On a les propriétés suivantes.*

- *Si A est convexe, une combinaison convexe de points de A est dans A.*
- *On a*
$$\operatorname{Conv} A = \{\textit{combinaison convexe de points de } A\}$$

Démonstration. Le premier point se montre par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la propriété est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la propriété vraie pour une combinaison convexe de n points. Soit $x_1, \cdots, x_{n+1} \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Quitte à permuter les points, on peut supposer que $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$. Notons que l'on a alors $\lambda \in]0,1]$ et $\lambda + \lambda_{n+1} = 1$. On a $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ donc, par hypothèse de récurrence, $q = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in A$. Ainsi par convexité de A, on a

$$p = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \lambda_{n+1} x_{n+1} + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = (1-\lambda) x_{n+1} + \lambda q \in A$$

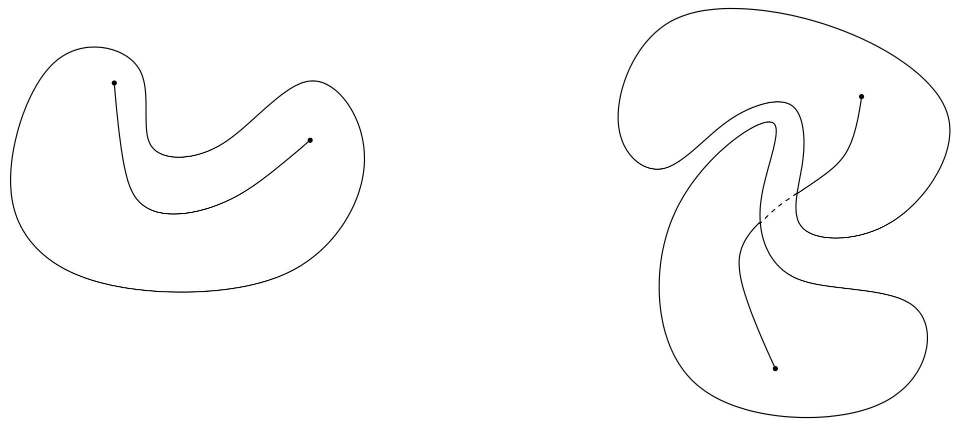

FIGURE 5.2 – Un exemple de partie connexe par arcs (à gauche) et non-connexe par arcs (à droite) de $\mathbb{R}^2$

La premier point est donc établi. Pour le second, notons C l'ensemble des combinaisons convexes de points de A. Notons que $A \subset \mathrm{Conv}(A)$ qui est convexe donc d'après le premier point on a $A \subset C \subset \mathrm{Conv}(A)$. Il suffit alors de montrer que C est convexe pour conclure. Soit $p, q \in C$, il existe alors $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 = \sum_{i=1}^m \mu_i$, $p = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ et $q = \sum_{i=1}^m \mu_i y_i$. Ainsi pour $t \in [0,1]$, on a

$$tp + (1-t)q = \sum_{i=1}^n t\lambda_i x_i + \sum_{i=1}^m (1-t)\mu_i y_i \in C$$

car $\sum_{i=1}^n t\lambda_i + \sum_{i=1}^m (1-t)\mu_i = t\sum_{i=1}^n \lambda_i + (1-t)\sum_{i=1}^m \mu_i = t + (1-t) = 1$. □

5.2 Connexité

La notion de connexité traduit la notion qu'un ensemble est « en un seul morceau ». On va donner deux approches à cette notion. La première est assez visuel et correspond bien à cette idée. La seconde est plus générale et permet d'inclure des cas non-couverts par la première version.

5.2.1 Connexité par arcs

Définition 5.2.1. Un espace métrique (X, d) est *connexe par arcs* si pour tout point $x, y \in X$ il existe un *arc* ou *chemin* allant de x à y : il existe une application continue $c : [0,1] \to X$ telle que $c(0) = x$ et $c(1) = y$ (Figure 5.2).

Exemple. Une partie convexe C d'un espace vectoriel normé E est connexe par arcs. En effet si $x, y \in C$, l'application $c : [0,1] \to C; t \mapsto (1-t)x + ty$ est bien définie ($c(t) \in C$), continue, $c(0) = x$ et $c(1) = y$.

Par exemple les boules d'un espace vectoriel normé sont connexes par arcs.

On a une propriété intéressante

Proposition 5.2.2. *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application continue. Si X est connexe par arcs, $f(X)$ est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit $a, b \in f(X)$, il existe donc $x, y \in X$ tel que $a = f(x)$ et $b = f(y)$. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin c allant de x à y. $f \circ c$ est alors un chemin allant de a à b. □

Dans un cas général il peut être intéressant de découper un espace métrique en partie connexe par arcs. Pour cela on introduit une relation entre les points de (X, d). Soit $x, y \in X$, on dit que x est reliable à y et on note $x \sim y$ si il existe un chemin allant de x à y.

Lemme 5.2.3. *La relation $\sim$ ainsi définie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Si $x \in X$, on a $x \sim x$, il suffit de considérer le chemin constant $c : t \mapsto x$. Si $x, y \in X$ et $x \sim y$, il existe c un chemin allant de x à y. Alors le chemin $\tilde{c} : t \mapsto c(1-t)$ va de y à x et $y \sim x$. Enfin si $x \sim y$ et $y \sim z$, il existe deux chemins c_1 et c_2 allant de x à y et de y à z. Alors le chemin c défini par

$$c(t) = \begin{cases} c_1(2t) \text{ si } t \leq \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) \text{ si } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

va de x à z et donc $x \sim z$ (la continuité de c est laissée au lecteur). □

Les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelées composantes connexes par arcs de X. Chacune de ces composantes est connexe par arcs. Ainsi on pourra retenir que X est connexe par arcs si et seulement si X a une unique composante connexe par arcs.

5.2.2 Connexité

On introduit maintenant une définition plus générale.

Définition 5.2.4. Un espace métrique (X, d) est *connexe* si toute partie de X qui est ouverte et fermée est soit $\emptyset$ soit X.

Une autre façon d'écrire la définition est donnée par la proposition suivante.

Proposition 5.2.5. *Soit (X, d) un espace métrique. X n'est pas connexe si et seulement si il existe deux ouverts U et V non vides tels que $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$.*

Autrement dit un espace métrique non connexe peut être partitionné en deux ouverts non vides. Notons que l'on peut remplacer « ouvert » par « fermé » dans l'énoncé ci-dessus.

Démonstration. Notons que si $U \cap V = \emptyset$ et $U \cup V = X$, $U = X \setminus V$. Ainsi si U et V existent, $U = X \setminus V$ est ouvert et fermé et différent de X et $\emptyset$: X n'est pas connexe. Réciproquement si X n'est pas connexe il existe U un ouvert fermé différent de X et $\emptyset$, U et $X \setminus U$ sont les deux ouverts recherchés. $\square$

Exemple. Considérons l'exemple $X = \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ muni de la métrique induite ($d(0, 1) = 1$). On a vu que $\{0\} = B(0, \frac{1}{2})$ et $\{1\} = B(1, \frac{1}{2})$ étaient des ouverts de X. Donc X n'est pas connexe. En fait cet exemple fournit une caractérisation de la connexité.

Proposition 5.2.6. *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Supposons X connexe et $f : X \to \{0, 1\}$ continue. $f^{-1}(0)$ est alors ouvert et fermé car $\{0\}$ est ouvert et fermé dans $\{0, 1\}$. Ainsi $f^{-1}(0) = X$ ou $\emptyset$, dans les deux cas f est constante. Réciproquement supposons X non connexe, il existe alors deux ouverts U et V tels que $U = X \setminus V$. On définit alors la fonction $f : X \to \{0, 1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in U \\ 1 \text{ si } x \in V \end{cases}$$

On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(0) = U$, $f^{-1}(1) = V$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ donc l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert : f est continue et non constante car U et V sont non vides. $\square$

Exemple. Le segment $[0, 1]$ est connexe. Supposons que $f : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est continue et $a, b \in [0, 1]$ vérifient $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe alors $c \in [a, b] \subset [0, 1]$ tel que $f(c) = \frac{1}{2}$. Ceci contredit $f([0, 1]) \subset \{0, 1\}$ et donc f est nécessairement constante. $[0, 1]$ est bien connexe.

Proposition 5.2.7. *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application continue. Si X est connexe, $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $g : f(X) \to \{0, 1\}$ continue, alors $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ est continue et est donc constante. Ainsi g est constante puisque $f : X \to f(X)$ est surjective. Ainsi $f(X)$ est connexe. $\square$

On a le lien suivant entre les deux propriétés.

Proposition 5.2.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Si X est connexe par arcs, X est connexe.*

Démonstration. Soit $f : X \to \{0, 1\}$ continue. Soit $x, y \in X$ et c un chemin allant de x à y. Comme c est continue, $f \circ c : [0, 1] \to \{0, 1\}$ est continue. Comme $[0, 1]$ est connexe $f \circ c$ est constante et $f(x) = f(c(0)) = f(c(1)) = f(y)$. Donc f est constante et X est connexe. $\square$

Exemple. On sait que les intervalles sont les convexes de $\mathbb{R}$, ce sont donc des connexes par arcs de $\mathbb{R}$ et donc des connexes de $\mathbb{R}$. Soit $C \subset \mathbb{R}$ une partie connexe, $a, b \in C$ et $c \in]a, b[$. Si $c \notin C$, alors $C \cap]-\infty, c[$ et $C \cap]c, +\infty[$ sont deux ouverts disjoints, non vides de C qui recouvrent C, donc C ne serait pas connexe. Ainsi $c \in C$ et C est un intervalle.

Ceci permet d'affirmer une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires.

Corollaire 5.2.9. *Soit (X, d) un espace métrique connexe et $f : (X, d) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x, y \in X$ et $c \in [f(x), f(y)]$ il existe $z \in X$ tel que $f(z) = c$.*

Démonstration. $f(X)$ est un connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle, ceci donne le résultat. □

On a vu que les connexes par arcs sont connexes. Dans $\mathbb{R}$ on a aussi vu que les connexes par arcs et les connexes sont exactement les mêmes parties. On a un autre cas où cette situation se produit.

Proposition 5.2.10. *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E. U est connexe par arcs si et seulement si U est connexe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que, si U est connexe, il est connexe par arcs. Pour cela considérons $C \subset U$ une composante connexe par arcs de U. Nous allons montrer que C est un ouvert de U.

Fixons $a \in C \subset U$ comme U est ouvert il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Comme $B(a, r)$ est convexe, $B(a, r)$ est connexe par arcs et donc $a \sim x$ pour tout $x \in B(a, r)$. Ainsi $B(a, r) \subset C$ et C est bien un ouvert.

Notons que le complémentaire de C dans U est l'union des composantes connexes de U différentes de C. Le complémentaire est donc un ouvert de U et C est un fermé de U. Ainsi C est ouvert et fermé dans U et comme U est connexe $C = \emptyset$ ou $C = U$. U a donc une unique composante connexe par arcs : U est connexe par arc. □

Remarque. D'une manière générale, la connexité et la connexité par arcs sont deux notions différentes. Dans la figure 5.3, la partie de $\mathbb{R}^2$ constituée de l'union d'un cercle et d'une courbe spiralant vers ce cercle est connexe sans être connexe par arcs (le lecteur tachera de montrer ces deux propriétés).

5.3 Composante connexe

Dans la partie précédente on a défini la notion de composante connexe par arcs. On va maintenant définir la notion de composante connexe.

Nous allons commencer par un lemme

Lemme 5.3.1. *Soit (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille de parties connexes de X telles que $x \in U_i$ pour tout i. Alors $\cup_{i \in I} U_i$ est connexe.*

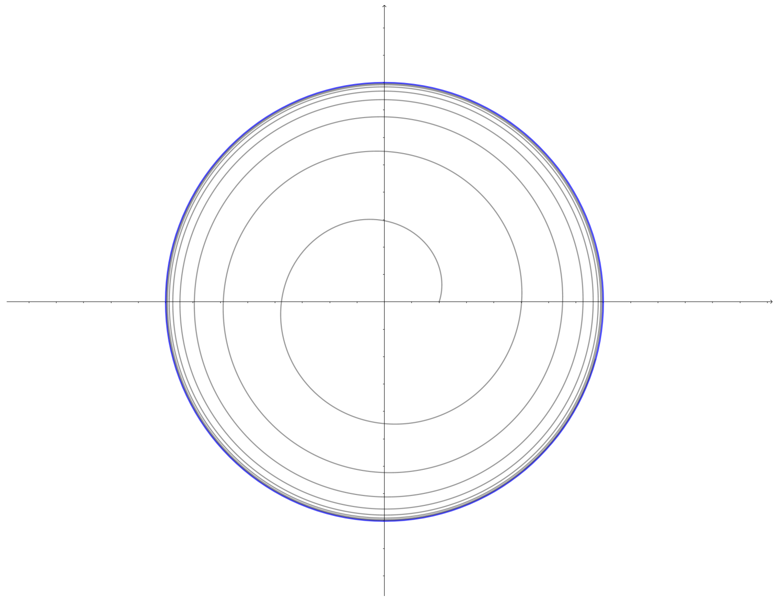

FIGURE 5.3 – Un exemple de partie connexe et non connexe par arcs

Démonstration. Notons $U = \cup_{i\in I} U_i$ et considérons $f : U \to \{0,1\}$ une application continue. La restriction de f à U_i est continue et, comme U_i est connexe, cette restriction est constante. Donc pour tout $y \in U_i$, on a $f(y) = f(x)$. Ainsi pour tout $y \in U$, $f(y) = f(x)$ et f est constante : U est bien connexe. □

Considérons (X, d) un espace métrique et $x \in X$. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties de A de X telles que $x \in A$ et A est connexe. D'après le lemme

$$C_x = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$$

est connexe et contient x, c'est même la plus grande partie connexe de X contenant x. On dit que C_x est la composante connexe de X contenant x.

Soit x et $y \in X$, d'après le lemme, si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, $C_x \cup C_y$ est connexe et contient x et y. Ainsi $C_x \cup C_y \subset C_x$ donc $C_y \subset C_x$ et, de même, $C_x \subset C_y$. Ainsi si $C_x \cap C_y \neq \emptyset$, on a $C_x = C_y$. Comme $x \in C_x$, la famille $\{C_x\}_{x\in X}$ forme une partition de X.

Exemple. Si on considère $X = \mathbb{N}$, comme les singletons $\{n\}$ sont ouverts et fermés, les composantes connexes sont précisément les singletons de l'ensemble. On dit que $\mathbb{N}$ est *totalement discontinu*.

Pour $X = \mathbb{Q}$, dans ce cas, les singletons ne sont pas ouverts, mais on peut voir que $\mathbb{Q}$ est aussi totalement discontinu. Soit p et q deux rationnels distincts avec $p < q$. Pour $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand on a alors $p < p + \frac{1}{n}\sqrt{2} < q$. Comme $p + \frac{1}{n}\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, on a

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}\cap] - \infty, p + \frac{1}{n}\sqrt{2}) \cup (\mathbb{Q}\cap]p + \frac{1}{n}\sqrt{2}, +\infty[)$$

On a donc écrit $\mathbb{Q}$ comme la réunion de deux ouverts disjoints, l'un contenant p l'autre contenant q. Ainsi $q \notin C_p$ et $p \notin C_q$. En conséquence chaque composante connexe contient un seul point : ce sont les singletons.

Un autre exemple similaire est donné par $X = K$ l'ensemble de Cantor. En effet si $a = \sum_{i \geq 1} a_i 3^{-i}$ et $b = \sum_{i \geq 1} b_i 3^{-i} \in K$ avec $a_i, b_i \in \{0, 2\}$. Si on suppose $(a_i) \prec (b_i)$ (voir Annexe B) avec $a_i = b_i$ pour $i < i_0$ et $0 = a_{i_0} < b_{i_0} = 2$, on peut alors définir.

$$c = \sum_{i=1}^{i_0 - 1} a_i 3^{-i} + 1 \times 3^{-i_0} + 2 \times 3^{-i_0 - 1}$$

On a alors $c \notin K$ et $a < c < b$. Par le même raisonnement que ci-dessus K est totalement discontinu.

Chapitre 6

Espaces vectoriels normés de dimension infinie

Jusqu'ici nous avons surtout regardé des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension finie. Dans ce chapitre nous allons considérer des exemples de dimension infinie et voir que certaine des propriétés valables en dimension finie ne le sont plus en dimension infinie.

6.1 Espaces de suites

Les espaces des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ sont de très bons exemples d'espaces vectoriels de dimension infinie. Toutefois il n'existe pas de normes « raisonnables » sur ces espaces. Ceci explique que l'on s'intéresse à des sous-espaces vectoriels de ces espaces. Pour $p \geq 1$, on définit

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p < +\infty\}$$
$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \{u \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} \mid \text{bornée}\}$$

Ces espaces sont eux naturellement munis de normes $\|\cdot\|_p : \ell^p(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}_+$ définies par

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{et} \qquad \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

Le fait que ces applications soient des normes est démontré en TD.

Notons que les espaces ℓ^p sont différents les uns des autres mais on peut montrer que $\ell^p \subset \ell^q$ si $p \leq q$. Par exemple, un élément de ℓ^1 est une suite u dont la série associée $\sum |u_n|$ est convergente. Ainsi on a nécessairement $\lim u_n = 0$ et donc u est une suite bornée, $u \in \ell^\infty$. On vient de montrer que $\ell^1 \subset \ell^\infty$.

Une conséquence de cela est que l'on peut considérer la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur ℓ^1 : pour tout élément u de ℓ^1 on peut calculer $\|u\|_1$ et $\|u\|_\infty$.

On peut se demander si ces deux normes sont équivalentes. Si $u \in \ell^1$, on peut remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |u_k| = \|u\|_1$$

Ainsi $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \leq \|u\|_1$. Ceci nous donne une des deux inégalités que l'on pourrait espérer. Supposons les deux normes équivalentes, il existe alors C telle que $\|u\|_1 \leq C\|u\|_\infty$ pour tout $u \in \ell^1$. On va tester cette inégalité pour des choix particuliers de u. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on définit un élément u^k de ℓ^1 par

$$u_n^k = \begin{cases} 1 \text{ si } n \leq k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} u^0 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ u^1 &= (1, 1, 0, 0, \dots) \\ u^2 &= (1, 1, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

On a $\|u^k\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n^k| = \sum_{n=0}^{k} 1 = k + 1$ et $\|u^k\|_\infty = 1$. Ainsi la constante C doit vérifier $k + 1 \leq C$ et cela pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est impossible et les deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. On peut retenir

En dimension infinie, deux normes ne sont pas toujours équivalentes !

On voit que pour montrer cela on a fait appel aux éléments u^i de ℓ^1. On a donc fait appel à une suite $(u^i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de ℓ^1, autrement dit une suite de suites. Une autre propriété que l'on vient de montrer c'est que l'application linéaire $L : (\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell^1, \|\cdot\|_1); u \mapsto u$ n'est pas continue (alors que L est juste l'application identité). En effet si L était continue, il existerait C tel que $\|u\|_1 = \|L(u)\|_1 \leq C\|u\|_\infty$. On peut retenir

En dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas toujours continues !

On a vu que $\ell^1 \subset (\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, on peut se demander si ce sous-espace vectoriel est un fermé de $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. Pour cela on va faire appel à une autre suite d'éléments de ℓ^1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $v^k \in \ell^1$ par

$$v_n^k = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \text{ si } n \leq k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par exemple

$$v^0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$
$$v^1 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots)$$
$$v^2 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 0, \dots)$$

définissons aussi $v \in \ell^\infty$ par $v_n = \frac{1}{n+1}$. On constate que $v \notin \ell^1$ et que $\|v^k - v\|_\infty = \frac{1}{k+2}$. Ainsi on a une suite d'éléments de ℓ^1 qui converge dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ vers un élément qui n'est pas dans ℓ^1. Donc ℓ^1 n'est pas fermé dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. On peut retenir

En dimension infinie, les sous-espaces vectoriels ne sont pas toujours fermés !

Considérons maintenant un autre exemple. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $w^k \in \ell^\infty$ par

$$w_n^k = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a

$$w^0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$$
$$w^1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$
$$w^2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$$

On a $\|w^k\|_\infty = 1$, (w^k) est donc une suite d'éléments de la boule unité fermée de ℓ^∞ notée $\overline{B}_\infty$. Si par l'absurde $\overline{B}_\infty$ est compacte, il existe une sous-suite $(w^{\varphi(k)})$ qui converge vers $w \in \ell^\infty$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et remarquons que pour $k \geq n$, $w_n^{\varphi(k)} = 0$. Par ailleurs, on a

$$|w_n - w_n^{\varphi(k)}| \leq \|w - w^{\varphi(k)}\|_\infty \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

Ainsi on obtient que $w_n = 0$ et donc la suite w est la suite nulle. On a alors $\|w^{\varphi(k)} - w\|_\infty = 1$ ce qui contredit que $w^{\varphi(k)} \to w$ dans ℓ^∞. Ainsi $\overline{B}_\infty$ n'est pas compacte. On peut retenir

En dimension infinie, les fermés bornés ne sont pas toujours compacts !

6.2 Espaces de fonctions

Une suite de réels est juste une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On peut généraliser cette définition en considérant, l'ensemble des fonctions $\mathcal{F}(X, \mathbb{k})$ qui est un espace vectoriel. Là aussi on considère souvent des sous-espaces vectoriels afin de les munir de normes intéressantes.

Le premier exemple est $\mathcal{B}(X, \Bbbk)$ l'ensemble des fonctions bornées sur lequel on définit la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|$$

Ainsi écrire $\lim f_n = f$ dans $(\mathcal{B}(X, \Bbbk), \|\cdot\|_\infty)$ pour une suite (f_n) de $\mathcal{B}(X, \Bbbk)$ signifie

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Cette notion est exactement celle de la convergence uniforme des suites de fonctions qui est vue en L2.

On peut par exemple considérer la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur le sous-espace des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$, $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Un résultat du cours de L2 affirme qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. En terme du vocabulaire topologique que l'on a introduit cela permet d'affirmer que $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$.

Sur un espace comme $C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on peut introduire les normes L^p $(p \geq 1)$:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^{1/p}$$

Noter que montrer que l'on définit ainsi une norme n'est pas immédiat pour $p > 1$ (la difficulté réside dans l'inégalité triangulaire).

Chapitre 7

Espaces métriques complets

7.1 Suites de Cauchy et définition

Commençons par une définition

Définition 7.1.1. Soit (X, d) un espace métrique, on dit que la suite (x_n) de X est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq n_0,\ d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Proposition 7.1.2. *Soit (x_n) un suite de X. Si (x_n) converge, (x_n) est de Cauchy.*

Démonstration. Notons ℓ la limite de (x_n). Soit $\varepsilon > 0$, comme $\lim x_n = \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq n_0$, $d(x_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi pour $n, m \geq n_0$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, \ell) + d(\ell, x_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

La suite est bien de Cauchy □

Une première propriété des suites de Cauchy est

Proposition 7.1.3. *Si (x_n) est une suite de Cauchy de X, (x_n) est bornée.*

Démonstration. Si nous écrivons la propriété pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, m \geq n_0$ $d(x_n, x_m) \leq 1$. Ainsi pour $n \geq n_0$, $d(x_n, x_{n_0}) \leq 1$. Ainsi en prenant $R = \max\{1\} \cup \{d(x_k, x_{n_0}), k \leq n_0\}$, on a $x_n \in \overline{B}(x_{n_0}, R)$ pour tout n et (x_n) est bornée. □

On a aussi :

Proposition 7.1.4. *Soit (x_n) une suite de Cauchy de X. Si (x_n) admet une valeur d'adhérence, (x_n) converge.*

Démonstration. Notons α une valeur d'adhérence de (x_n) : il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $\lim x_{\varphi(n)} = \alpha$. Fixons $\varepsilon > 0$, comme (x_n) est de Cauchy il existe n_0 tel que pour $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$. Ainsi pour $n, m \geq n_0$, on a $d(x_n, x_{\varphi(m)}) \leq \varepsilon$ (car $\varphi(m) \geq m \geq n_0$). On fait alors tendre $m \to +\infty$ pour obtenir $d(x_n, \alpha) \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. On a donc $\lim x_n = \alpha$. □

On voit donc que les suites de Cauchy sont très proches d'être des suites convergentes. En toute généralité ce n'est pas le cas c'est pourquoi on introduit la notion d'espace métrique complet.

Définition 7.1.5. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est *complet* si toute suite de Cauchy est convergente.

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ complet est appelé un *espace de Banach.*

Remarque. Notons que si d et δ sont deux distances équivalentes sur un espace X, les suites de Cauchy pour d et δ sont les mêmes. Ainsi (X, d) est complet si et seulement si (X, δ) est complet

Nous allons très vite donner des exemples d'espaces complets. Mentionnons déjà un premier résultat.

Proposition 7.1.6. *Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$ une partie. On a*

- *Si (A, d) est complet, A est fermé dans X.*
- *Si (X, d) est complet et A est fermé dans X, (A, d) est complet.*

Démonstration. Pour la première affirmation, soit (a_n) une suite de A qui converge vers $\bar{a}$ dans X. Comme (a_n) est convergente c'est une suite de Cauchy, comme (A, d) est complet, (a_n) converge vers $\bar{b}$ dans A donc dans X. Par unicité de la limite $\bar{a} = \bar{b} \in A$ et A est fermé.

Pour la seconde affirmation, soit (a_n) une suite de Cauchy de A. C'est alors une suite de Cauchy de X qui converge vers $\bar{a}$ dans X puisque X est complet. Comme A est fermé, $\bar{a} \in A$ et donc A est complet. □

7.2 Exemples et constructions d'espaces complets

7.2.1 Compacité et complétude

On a le résultat suivant

Proposition 7.2.1. *Soit (X, d) un espace métrique dont les parties fermées bornées sont compactes. Alors (X, d) est complet.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy de X et notons $F = \overline{\{x_n, n \in \mathbb{N}\}}$. Comme (x_n) est de Cauchy, elle est bornée, F est bornée et comme la partie fermée bornée de X sont compactes, F est compact. La suite (x_n) est une suite de F. Elle admet donc une valeur d'adhérence et converge. Ainsi X est complet. □

Corollaire 7.2.2. *Soit (X, d) un espace métrique compact, alors (X, d) est complet.*

Corollaire 7.2.3. *Tout espace vectoriel normé de* ***dimension finie*** *$(E, \|\cdot\|)$ est complet et est donc un espace de Banach.*

Exemple. Entre autre, $\mathbb{R}$ est complet. En fait $\mathbb{R}$ est « construit » pour être complet.

7.2.2 Produit d'espaces complets

Proposition 7.2.4. *Soit $(X_i, d_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces métriques complets et D la distance produit sur $X_1 \times \cdots \times X_n$. Alors $(X_1 \times \cdots \times X_n, D)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(p^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $X = X_1 \times \cdots \times X_n$. Chaque élément p^k s'écrit $p^k = (p_1^k, \dots, p_n^k)$ avec $p_i^k \in X_i$. Comme $d_i(p_i^k, p_i^l) \leq D(p^k, p^l)$, chaque suite $(p_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X_i, d_i). Comme X_i est complet, $p_i^k \to \bar{p}_i \in X_i$. Ainsi $\lim p^k = \bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)$ dans (X, D) et (X, D) est complet. □

Exemple. Sachant que $\mathbb{R}$ est complet, on retrouve que $\mathbb{R}^n$ est complet.

7.2.3 Espace des applications bornées

Soit A un ensemble et (X, d) un espace métrique. Soit $f : A \to X$ une application, on dit que f est bornée si $f(A)$ est une partie bornée de X. On définit alors $\mathcal{B}(A, X)$ l'espace des applications de A dans X qui sont bornées.

On peut alors définir une métrique sur $\mathcal{B}(A, X)$. Si f et $g \in \mathcal{B}(A, X)$ on définit :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{a\in A} d(f(a), g(a))$$

Exemple. Si $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}(A, \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions bornées qui, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace vectoriel normé. La distance associée à cette norme est précisément la distance d_∞ définie ci-dessus.

Nous allons vérifier que d_∞ est bien une distance. Tout d'abord notons que comme f et g sont supposées bornées, $d_\infty(f, g)$ est bien défini et appartient à $\mathbb{R}_+$. Si $d_\infty(f, g) = 0$, on a alors $d(f(a), g(a)) = 0$ pour tout a donc $f(a) = g(a)$ et $f = g$. $d_\infty(f, g) = d_\infty(g, f)$ est évident. Quant à l'inégalité triangulaire, si $f, g, h \in \mathcal{B}(A, X)$, on a pour tout $a \in A$

$$d(f(a), g(a)) \leq d(f(a), h(a)) + d(h(a), g(a)) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$$

et donc, par passage à la borne supérieure, $d_\infty(f, g) \leq d_\infty(f, h) + d_\infty(h, g)$. Nous avons bien une distance.

Cette construction est associée au résultat suivant

Proposition 7.2.5. *Soit A un ensemble et (X, d) un espace métrique* ***complet****, alors $(\mathcal{B}(A, X), d_\infty)$ est complet.*

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(\mathcal{B}(A,X),d_\infty)$, Soit $\varepsilon>0$, il existe donc $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n,m\geq n_\varepsilon$, $d_\infty(f_n,f_m)\leq\varepsilon$. Fixons $a\in A$, pour $n,m\geq n_\varepsilon$, on a $d(f_n(a),f_m(a))\leq d_\infty(f_n,g_m)\leq\varepsilon$. Ainsi $(f_n(a))$ est une suite de Cauchy de X. Comme X est complet, $(f_n(a))$ converge vers une limite que l'on note $f(a)$.

Nous allons montrer que l'application f ainsi définie est bornée et que (f_n) tend vers f pour d_∞.

Tout d'abord, pour $m\geq n_1$, on a $d(f_{n_1}(a),f_m(a))\leq 1$. En faisant tendre $m\to+\infty$, on obtient $d(f_{n_1}(a),f(a))\leq 1$. Soit $x\in X$, comme f_{n_1} est bornée il existe R tel que $f_{n_1}(a)\in B(x,R)$ pour tout $a\in A$ et donc $f(a)\in B(x,R+1)$ pour tout $a\in A$: on a bien $f\in\mathcal{B}(A,X)$.

Par ailleurs, pour $n,m\geq n_\varepsilon$, on a $d(f_n(a),f_m(a))\leq\varepsilon$ pour tout $a\in A$. À nouveau en faisant tendre $m\to\infty$ on obtient pour $n\geq n_\varepsilon$, $d(f_n(a),f(a))\leq\varepsilon$. Par passage à la borne supérieure, on obtient pour $n\geq n_\varepsilon$, $d_\infty(f_n,f)\leq\varepsilon$. Ainsi $\lim f_n=f$ dans $(\mathcal{B}(A,X),d_\infty)$. □

Si A est muni d'une distance δ, on peut considérer une partie de $\mathcal{B}(A,X)$ qui est l'espace des applications continues bornées de A dans X

$$C_b(A,X)=\{f\in\mathcal{B}(A,X)\mid f \text{ continue}\}$$

On a alors le résultat

Proposition 7.2.6. *Soit (A,δ) et (X,d) deux espaces métriques, $C_b(A,X)$ est un fermé de $\mathcal{B}(A,X)$. Si X est complet, $C_b(A,X)$ est complet.*

La première partie de l'énoncé se reformule : une limite uniforme d'applications continues est continue.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de $C_b(A,X)$ qui converge vers f dans $\mathcal{B}(A,X)$ pour d_∞. Montrons que f est continue. Soit $a\in A$ et $\varepsilon>0$. Comme $\lim f_n=f$, il existe N tel que pour $n\geq N$, $d_\infty(f_n,f)\leq\frac{\varepsilon}{3}$. f_N est continue, il existe donc $\eta>0$ tel que, pour tout b vérifiant $\delta(b,a)<\eta$, on ait $d(f_N(b),f_N(a))\leq\frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi si $\delta(b,a)\leq\eta$, on a

$$\begin{aligned}d(f(b),f(a))&\leq d(f(b),f_N(b))+d(f_N(b),f_N(a))+d(f_N(a),f(a))\\&\leq d_\infty(f,f_N)+d(f_N(b),f_N(a))+d_\infty(f_N,f)\\&=\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{b\to a}f(b)=f(a)$, f est continue et $C_b(A,X)$ est un fermé. $C_b(A,X)$ est donc complet comme fermé d'un espace complet si X est complet. □

Exemple. Sur $[0,1]$ qui est compact, toute fonction continue est bornée donc $(C^0([0,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

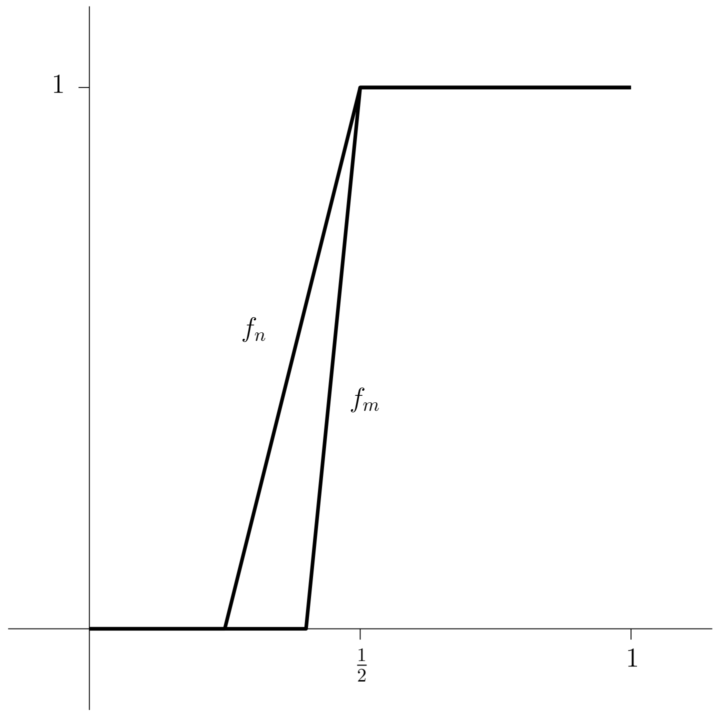

FIGURE 7.1 – Le graphe des fonctions f_n

Notons aussi que pour la norme L^p, $C^0([0,1],\mathbb{R})$ n'est pas complet. Pour montrer cela, on considère pour $n \geq 2$ la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n(x - \frac{1}{2}) + 1 & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

(voir Figure 7.1)

Ces fonctions sont bien continues sur $[0,1]$ et nous allons montrer que $(f_n)_{n\geq 2}$ est une suite de Cauchy de $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Notons déjà que $0 \leq f_n \leq 1$ et que pour $m \geq n \geq 2$ on a $f_n(x) = f_m(x)$ pour $x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ et $x \geq \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^p dx = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \leq \frac{2^p}{n}$$

Le majorant de droite tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ donc la suite est de Cauchy. Nous allons maintenant montrer que f_n n'admet pas de limite dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$. Si par l'absurde c'était le cas, il existerait $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_n\|_p \to 0$. On aurait donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}} |f(x)|^p dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1|^p dx \leq \|f - f_n\|_p^p$$

et donc par passage à la limite.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^p dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x) - 1|^p dx = 0$$

Comme f est continue ceci implique que $f(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$ et $f(x) = 1$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. On a donc une contradiction en regardant la valeur de $f(\frac{1}{2})$.

7.2.4 Le cas $\ell^p(\mathbb{N})$

Comme $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \mathcal{B}(\mathbb{N}, \Bbbk)$ et $\Bbbk$ est complet on sait que ℓ^∞ est complet. On va montrer le résultat suivant dont on aura surtout l'usage pour $p = 2$. La preuve est très similaire à celle de $\mathcal{B}(A, X)$

Proposition 7.2.7. *L'espace $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\ell^p(\mathbb{N})$. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$ il existe k_ε tel que pour $k, l \geq k_\varepsilon$, $\|u^k - u^l\|_p \leq \varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors pour $k, l \geq k_\varepsilon$,

$$|u_n^k - u_n^l| \leq \left(\sum_{i=0}^{\infty} |u_i^k - u_i^l|^p\right)^{1/p} = \|u^k - u^l\|_p \leq \varepsilon$$

Ainsi $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\Bbbk$ qui est complet donc $(u_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée u_n. Montrons que la suite (u_n) ainsi définie est dans $\ell^p(\mathbb{N})$ et $\lim u^k = u$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$. Fixons $N \in \mathbb{N}$ et notons que pour $k, l \geq k_\varepsilon$ on a

$$\sum_{i=0}^{N} |u_i^k - u_i^l|^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} |u_i^k - u_i^l|^p = \|u^k - u^l\|_p^p \leq \varepsilon^p$$

Pour $k \geq k_\varepsilon$ fixé et $l \to +\infty$ on obtient donc

$$\sum_{i=0}^{N} |u_i^k - u_i|^p \leq \varepsilon^p$$

Comme cela est valable pour tout $N \in \mathbb{N}$, ceci implique que la série $\sum_i |u_i^k - u_i|^p$ converge et donc $u^k - u \in \ell^p(\mathbb{N})$ et donc $u \in \ell^p(\mathbb{N})$. De plus en laissant tendre $N \to \infty$, on obtient pour $k \geq k_\varepsilon$

$$\|u^k - u\|_p = \left(\sum_{i=0}^{\infty} |u_i^k - u_i|^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon$$

autrement dit $\lim u^k = u$ dans $\ell^p(\mathbb{N})$. □

7.3 Applications de la complétude

7.3.1 Le théorème des fermés emboîtés

Théorème 7.3.1 (Fermés emboîtés). *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante (pour l'inclusion) de fermés non vides de X telle que* $\lim \mathrm{Diam}(F_n) = 0$. *Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est un singleton.*

Remarque. Entre autre le résultat affirme que l'intersection est non-vide. Il est important de noter que l'hypothèse $\lim \mathrm{Diam}(F_n) = 0$ est fondamentale. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $F_n = [n, +\infty[$ est une famille décroissante de fermés non vide de $\mathbb{R}$, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[n, +\infty[= \emptyset$.

Démonstration. Soit $F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Si $x, y \in F$, on a $x, y \in F_n$ donc $d(x, y) \leq \mathrm{Diam}(F_n)$ donc par passage à la limite $d(x, y) = 0$ et $x = y$: il y a donc au plus un élément dans F.

Comme F_n est non vide, il existe $x_n \in F_n$. Comme (F_n) est décroissante, pour $n, m \geq N$, on a $x_n, x_m \in F_N$ et donc $d(x_n, x_m) \leq \mathrm{Diam}\, F_N$. Comme $\mathrm{Diam}(F_N) \to 0$, la suite (x_n) est de Cauchy. X étant complet, (x_n) converge vers une limite $\bar{x}$. Comme $(x_n)_{n\geq N}$ est une suite de F_N qui est fermé, on a $\bar{x} \in F_N$ (pour tout N). Ainsi $\bar{x} \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} F_N = F$: F est non-vide donc un singleton. □

7.3.2 Le théorème du point fixe

Définition 7.3.2. Soit (X, d) un espace métrique. Une application $f : X \to X$ est dite *contractante* si f est k-lipschitzienne avec $k < 1$.

On rappelle que si $f : X \to X$, on dit que $x \in X$ est un point fixe si $f(x) = x$. Dans les espaces complets, on dispose d'un théorème qui permet d'assurer l'existence de point fixe pour les applications contractantes. Ce résultat est très important et connaît de nombreuses applications dans d'autres parties du programme de Licence et de Master.

Théorème 7.3.3 (Théorème du point fixe de Banach-Picard). *Soit (X, d) un espace métrique complet (non vide) et $f : X \to X$ une application contractante. Alors f admet un unique point fixe a.*

De plus pour tout point $b \in X$ la suite (x_n) définie par récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = b \end{cases}$$

converge vers a.

Démonstration. Supposons que a_1 et $a_2 \in X$ sont des points fixes de f. On a alors

$$d(a_1, a_2) = d(f(a_1), f(a_2)) \leq kd(a_1, a_2)$$

Ainsi $(1-k)d(a_1,a_2) \leq 0$ et, comme $k<1$, on a $d(a_1,a_2)=0$. Donc $a_1 = a_2$: f admet au plus un point fixe. Montrons maintenant l'existence d'un tel point fixe. Fixons $b \in X$ et considérons la suite (x_n) définie par récurrence comme dans l'énoncé. On a donc pour $n \geq 1$,

$$d(x_{n+1},x_n) = d(f(x_n),f(x_{n-1})) \leq kd(x_n,x_{n-1})$$

On en déduit donc que $d(x_{n+1},x_n) \leq k^n d(x_1,x_0)$ pour $n \geq 0$. En conséquence on peut estimer la distance entre x_n et x_m pour $m \geq n$. On a

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_{i+1},x_i) \leq d(x_1,x_0)\sum_{i=n}^{m-1} k^i \leq d(x_1,x_0)k^n\frac{1-k^{m-n}}{1-k} \leq d(x_1,x_0)\frac{k^n}{1-k}$$

Comme $k<1$, $k^n \to 0$ et donc la suite (x_n) est de Cauchy : si $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \geq N$, $d(x_1,x_0)\frac{k^n}{1-k} \leq \varepsilon$ et donc pour $n,m \geq N$, $d(x_n,x_m) \leq \varepsilon$. Comme X est complet, la suite (x_n) converge vers $a \in X$. On a $x_{n+1} = f(x_n)$ et comme f est continue par passage à la limite on a $a = f(a)$: a est un point fixe de f. □

Remarque. Notons qu'en faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'une des inégalités de la preuve on obtient que

$$d(x_n,a) \leq d(x_1,x_0)\frac{k^n}{1-k}$$

Ce résultat donne une information sur la vitesse de convergence de la suite vers le point fixe.

7.3.3 Série dans les espaces de Banach

On va donner ici une généralisation de la théorie des séries vue en L2.

Définition 7.3.4. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E. On dit que la série $\sum u_n$ *converge* si la suite (S_n) des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ converge (sinon on dit que la série diverge).

Si la série converge on note $\sum_{k=0}^\infty u_k$ la limite de la suite (S_n).

Remarque. Si $E = \mathbb{k}^n$, l'étude de la convergence d'une série se ramène à l'étude de la convergence des séries de chacune des coordonnées.

A priori, l'étude d'une série dans E est donc l'étude d'une suite de E. On va voir que si E est complet on peut se ramener à une suite de $\mathbb{R}$.

Définition 7.3.5. Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E. On dit que la série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série réelle $\sum\|u_n\|$ est convergente.

L'intérêt de cette notion vient du résultat suivant.

Proposition 7.3.6. *Soit $(E,\|\cdot\|)$ un espace de Banach et (u_n) une suite de E. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ les sommes partielles. Nous allons montrer que la suite (S_n) est de Cauchy. On a pour $N \leq n < m$

$$\|S_m - S_n\| = \|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|u_k\| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|$$

Comme la série est absolument convergente, on a $\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\| = 0$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe donc un N tel que $\sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$. Ainsi pour $n, m \geq N$, $\|S_n - S_m\| \leq \varepsilon$. La suite est bien de Cauchy, elle converge puisque que E est complet. □

Remarque. La proposition nous dit donc que pour étudier la convergence de la série $\sum u_n$ qui est composée d'éléments de E, on peut étudier la convergence de la série $\sum \|u_n\|$ qui est une série réelle pour laquelle on dispose de nombreux critères. Notons toutefois que la série $\sum u_n$ peut très bien converger sans être absolument convergente.

Exemple. Si $E = \Bbbk$, on retrouve la notion d'absolue convergence du cours de L2.

Exemple (L'exponentielle de matrice)*.* Considérons le cas de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, E est de dimension finie donc toute les normes sont équivalentes et de plus E est complet. E est une algèbre, on choisit donc $\|\cdot\|$ une norme d'algèbre.

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{1}{n!} M^n$ est convergente. En effet, on va montrer qu'elle est absolument convergente. On a $\|\frac{1}{n!} M^n\| = \frac{1}{n!}\|M^n\| \leq \frac{1}{n!}\|M\|^n$ et la série $\sum \frac{1}{n!}\|M\|^n$ est convergente. Ainsi la somme de la série est bien définie et on la note

$$\exp(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n$$

Exemple (La convergence normale)*.* Considérons le cas de $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. E est un espace de Banach. Ainsi si (f_n) est une suite de $C^0([0,1], \mathbb{R})$ dire que la série $\sum f_n$ converge absolument signifie que $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. Il s'agit de la notion de convergence normale vue en L2.

7.4 L'escalier de Cantor ou du diable

Dans cette partie nous allons appliquer certains des résultats précédents afin de construire une fonction particulière définie sur $[0,1]$ appelée escalier de Cantor ou du diable. Cette fonction $\bar{f}$ aura la propriété suivante : $\bar{f} : [0,1] \to [0,1]$ est continue croissante $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(1) = 1$ et de plus $\bar{f}$ est dérivable en presque tout point de $[0,1]$ et de dérivée nulle en ces points.

Pour cela considérons $X = \{f \in C^0([0,1]) \mid f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1\}$. Pour $f \in X$, on définit

$$D(f) : t \in [0,1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} f(3t) & \text{si } t \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{1}{3} < t < \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2}(1 + f(3t-2)) & \text{si } t \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$

Notons que comme f est continue, $D(f)$ est continue sur $[0, \frac{1}{3}[$ et $]\frac{2}{3}, 1]$. Elle est constante sur $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ donc continue sur cet intervalle. De plus on a

$$\lim_{t \to \frac{1}{3}^-} D(f)(t) = \frac{1}{2} = \lim_{t \to \frac{1}{3}^+} D(f)(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \frac{2}{3}^-} D(f)(t) = \frac{1}{2} \lim_{t \to \frac{2}{3}^+} D(f)(t)$$

Ainsi $D(f)$ est continue sur $[0,1]$. Comme, on a $D(f)(0) = f(0) = 0$ et $D(f)(1) = \frac{1}{2}(1 + f(1)) = 1$, $D(f) \in X$. Ainsi l'application ci-dessous est bien définie :

$$D : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ f & \longmapsto & D(f) \end{array}$$

On munit alors X de la distance d_∞ induite de la norme $\|\cdot\|_\infty$:

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

Montrons que D est alors $\frac{1}{2}$-lipschitzienne. Soit $f, g \in X$ et évaluons $(D(f) - D(g))(t)$. Si $t \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, on a $(D(f) - D(g))(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Si $t \in [0, \frac{1}{3}]$, on a

$$|(D(f) - D(g))(t)| = |\frac{1}{2} f(3t) - \frac{1}{2} g(3t)| = \frac{1}{2}|f(3t) - g(3t)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$$

Si $t \in [\frac{2}{3}, 1]$, on a

$$|(D(f) - D(g))(t)| = |\frac{1}{2}(1 + f(3t-2)) - \frac{1}{2}(1 + g(3t-2))| = \frac{1}{2}|f(3t-2) - g(3t-2)| \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty$$

Ainsi on a

$$d_\infty(D(f), D(g)) = \|D(f) - D(g)\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f - g\|_\infty = \frac{1}{2} d_\infty(f,g)$$

D est bien $\frac{1}{2}$-lipschitzienne.

Pour $t \in [0,1]$, notons que l'application $\varphi_t : C^0([0,1]) \to \mathbb{R}; f \mapsto f(t)$ est continue. En effet φ_t est linéaire et $|\varphi_t(f)| = |f(t)| \leq \sup_{s \in [0,1]} |f(s)| = \|f\|_\infty$. Ainsi $X = \varphi_0^{-1}(0) \cap \varphi_1^{-1}(1)$ est un fermé de $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. On sait que $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet donc X est complet.

Ainsi $D : (X, d_\infty) \to (X, d_\infty)$ est une application contractante sur un espace complet. Le théorème du point fixe permet alors d'affirmer l'existence d'une fonction $\bar{f} \in X$ telle que $D(\bar{f}) = \bar{f}$.

Nous allons montrer les propriétés annoncées sur $\bar{f}$. Tout d'abord $\bar{f} \in X$ donc $\bar{f}$ est continue, $\bar{f}(0) = 0$ et $\bar{f}(1) = 1$.

Montrons que si $f \in X$ est croissante alors $D(f)$ est aussi croissante. Notons tout d'abord que si $f \in X$ est croissante on a $0 = f(0) \leq f(t) \leq f(1) = 1$ pour $t \in [0,1]$. Ainsi, pour $t \in [0, \frac{1}{3}]$, on a $D(f)(t) \in [0, \frac{1}{2}]$ et, pour $t \in [\frac{2}{3}, 1]$, on a $D(f)(t) \in [\frac{1}{2}, 1]$. Ainsi

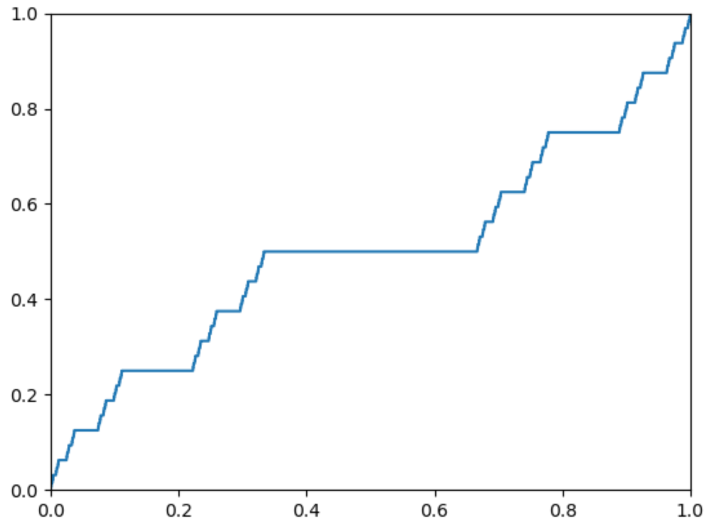

FIGURE 7.2 – L'escalier du diable

pour montrer la monotonie de $D(f)$ on peut considérer $t \leq s \in [0, \frac{1}{3}]$ ou $t \leq s \in [\frac{2}{3}, 1]$. Dans le premier cas, on a

$$D(f)(t) = \frac{1}{2} f(3t) \leq \frac{1}{2} f(3s) = D(f)(s)$$

$D(f)$ est donc croissante sur $[0, \frac{1}{3}]$. De même sur $[\frac{2}{3}, 1]$ et donc sur $[0, 1]$. Maintenant considérons la suite définie par $f_0 = \mathrm{id} \in X$ et $f_{n+1} = D(f_n)$. Par le théorème du point fixe on a $f_n \to \bar{f}$ dans X. f_0 est croissante donc toutes les f_n sont croissantes. De plus si $t \leq s$, on a

$$\bar{f}(t) = \varphi_t(\bar{f}) = \lim \varphi_t(f_n) = \lim f_n(t) \leq \lim f_n(s) = \lim \varphi_s(f_n) = \varphi_s(\bar{f}) = \bar{f}(s)$$

Donc $\bar{f}$ est croissante.

Montrons maintenant que $\bar{f}$ est dérivable presque partout et de dérivée nulle. Pour cela notons $U_0 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ et $U_{n+1} = T(U_n)$ (avec les notations de la section 4.5). Nous allons montrer que $\bar{f}$ est dérivable de dérivée nulle sur chaque U_n.

On a $\bar{f} = D(\bar{f})$ donc $\bar{f} = \frac{1}{2}$ sur U_0. Ainsi $\bar{f}$ est dérivable sur U_0 et de dérivée nulle. Supposons montré que $\bar{f}$ est dérivable sur U_n et de dérivée nulle. On a $U_{n+1} = t_0(U_n) \cup t_2(U_n)$. Pour $t \in t_0(U_n) \subset [0, \frac{1}{3}]$, on a $\bar{f}(t) = D(\bar{f})(t) = \frac{1}{2}\bar{f}(3t)$ et $3t \in U_n$. Donc $\bar{f}$ est dérivable de dérivée nulle. De même sur $t_2(U_n)$. Ainsi $\bar{f}$ est dérivable de dérivée nulle sur $T(U_n) = U_{n+1}$. Donc $\bar{f}$ est dérivable sur $\cup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, le complémentaire du Cantor, qui est bien de mesure de Lebesgue 1.

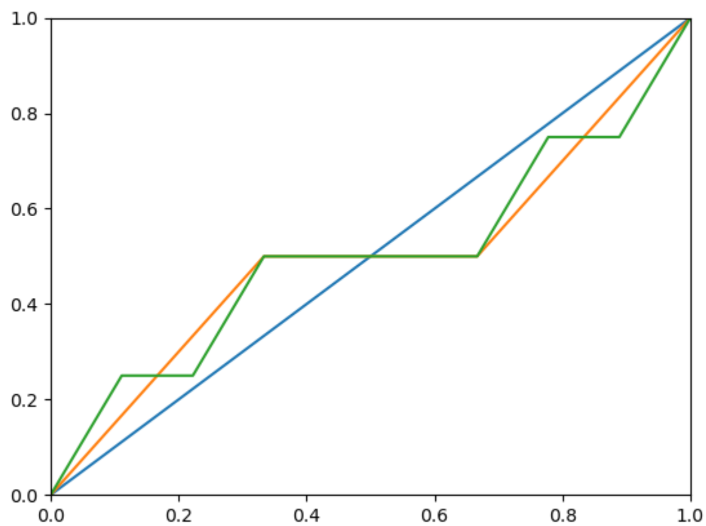

FIGURE 7.3 – Les graphes de $f_0 = \text{id}$, $f_1 = D(f_0)$ et $f_2 = D(f_1)$

Chapitre 8

Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert

Les espaces préhilbertiens sont une généralisation des espaces euclidiens vue en L2. Nous encourageons le lecteur à relire le contenu de ce cours. Les espaces de Hilbert sont des espaces préhilbertiens avec une hypothèse topologique supplémentaire.

8.1 Espaces préhilbertiens

Nous allons travailler sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Dans le cas des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, les définitions et les propriétés que nous allons donner sont aussi valables et même plus simples. On rappelle que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\overline{\lambda}$ désigne le conjugué de λ

8.1.1 Définitions

Définition 8.1.1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Un *produit scalaire hermitien* sur E est un forme sesquilinéaire hermitienne définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{C}$, c'est à dire qui vérifie les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in E$, $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.
- $\forall x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
- $\forall x \in E$, $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$ et $\langle x, x \rangle = 0$ implique $x = 0$.

E muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *espace préhilbertien.*

Remarque. Notons que la première propriété implique que $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$, la dernière précise le signe. Les deux premières propriétés impliquent

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, un produit scalaire est un forme bilinéaire symétrique définie positive $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$.

Un espace préhilbertien E de dimension finie est appelé hermitien. Dans le cas réel, on parle d'espace vectoriel euclidien.

Exemple. Sur $\mathbb{C}^n$ ou $\mathbb{R}^n$, on définit un produit scalaire pour $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ par

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$$

On peut généraliser cette définition à $\ell^2(\mathbb{N})$ de la façon suivante : si $u, v \in \ell^2(\mathbb{N})$, on définit

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \overline{v_n}$$

Notons que $|u_n \overline{v_n}| = |u_n||v_n| \leq \frac{1}{2}(|u_n|^2 + |v_n|^2)$, ceci permet d'assurer la convergence de la série ci-dessus.

Pour $E = C^0([a, b], \mathbb{C})$ on peut définir

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

Proposition et définition 8.1.2. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. On définit alors la* norme associée *par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. $\|\cdot\|$ est une norme sur E*

Avant de démontrer ce résultat on va établir un résultat préliminaire.

Proposition 8.1.3. *Soit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un produit scalaire sur E. On a alors les propriétés suivantes*

- *$\forall x, y \in E$, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Égalité du parallélogramme, voir Figure 8.1)*
- *$\forall x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires (Inégalité de Cauchy-Schwarz).*

Démonstration. On a

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \tag{8.1}$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \tag{8.2}$$

Ainsi en sommant les deux égalités, on obtient l'égalité du parallélogramme. Pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on note que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a d'après (8.1)

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda}\langle x, y \rangle) + |\lambda|^2\|y\|^2$$

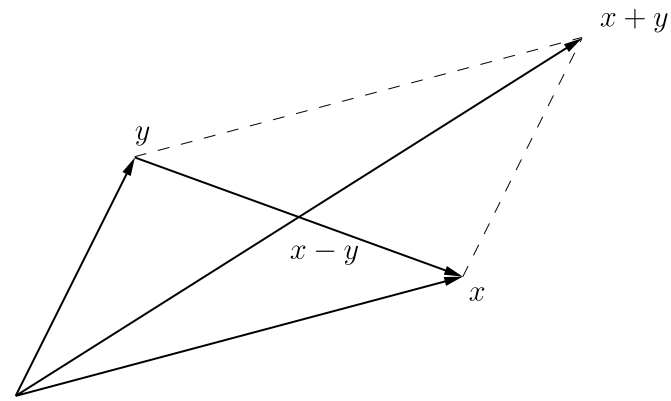

FIGURE 8.1 – L'égalité du parallélogramme

Notons $\langle x, y\rangle = \rho e^{i\theta}$ et choisissons $\lambda = te^{i\theta}$, on a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \|x\|^2 + 2t\rho + t^2\|y\|^2$$

On a donc un trinôme positif donc son discriminant est négatif : $\rho^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$ ou encore $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$. En cas d'égalité, le trinôme a donc une racine : il existe donc λ tel que $0 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle$ et donc $x = -\lambda y$ □

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 8.1.3

Démontration de la proposition 8.1.3. La troisième propriété assure la positivité et la séparation de $\|\cdot\|$. Pour l'homogénéité, on a $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{|\lambda|^2\langle x, x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|\|x\|$. Pour l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Ceci donne le résultat en prenant la racine carré. □

Remarque. On peut noter que la preuve permet d'affirmer que l'on a égalité dans l'inégalité de triangulaire si et seulement si $y = tx$ avec $t \geq 0$.

Avec la norme ainsi définie, on peut considérer E comme un espace vectoriel normé. On a le résultat suivant.

Proposition 8.1.4. *Soit E une espace préhilbertien. Alors l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle : E \times E \to \mathbb{k}$ est continue.*

Démonstration. Soit $a, b, x, y \in E$. On a alors

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle - \langle a, b\rangle| &= |\langle x, y\rangle - \langle x, b\rangle + \langle x, b\rangle - \langle a, b\rangle| \\ &= |\langle x, y - b\rangle + \langle x - a, b\rangle| \\ &\leq |\langle x, y - b\rangle| + |\langle x - a, b\rangle| \leq \|x\|\|y - b\| + \|x - a\|\|b\| \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{(x,y)\to(a,b)}\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$. □

8.1.2 Orthogonalité

Définition 8.1.5. Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. On dit que x et y sont *orthogonaux* si $\langle x, y\rangle = 0$.

Si $A \subset E$ est une partie on appelle *orthogonal* de A noté $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à ceux de A :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$$

Théorème 8.1.6 (Pythagore)**.** *Soit E un espace préhilbertien et $x, y \in E$. Si x et y sont orthogonaux on a $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.*

*Réciproquement si E est un espace préhilbertien **réel** et $x, y \in E$. Si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, x et y sont orthogonaux.*

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence de (8.1). □

Remarque. Il peut être important de noter que dans le cas d'un espace préhilbertien complexe, le cas d'égalité dans pythagore n'implique pas l'orthogonalité. Par exemple dans $\mathbb{C}^2$, les vecteurs $(1,1)$ et (i,i) vérifient

$$\|(1,1)\|^2 + \|(i,i)\|^2 = 2 + 2 = 4 = \|(1+i, 1+i)\|^2$$

et $\langle (1,1), (i,i)\rangle = -2i \neq 0$ donc les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, ils sont même colinéaires : $(i,i) = i(1,1)$.

Notons que l'on a

Proposition 8.1.7. *Soit A une partie d'un espace préhilbertien E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.*

Démonstration. Soit $a \in A$ et définissons l'application linéaire $l_a : E \to \mathbb{k}; x \mapsto \langle x, a\rangle$. Par définition

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\} = \bigcap_{a \in A} \{x \in E \mid \langle x, a\rangle = 0\} = \bigcap_{a\in A} \ker l_a$$

Comme $\langle \cdot, \cdot\rangle$ est continu, l_a est continue donc $\ker l_a$ est un sous-espace vectoriel fermé de E. Ainsi $A^\perp$ est une intersection de sous-espaces vectoriels fermés donc un sous-espace vectoriel fermé. □

Définition 8.1.8. Soit E un espace préhilbertien, une famille $(e_i)_{i\in I}$ est *orthonormée* si pour tout $i, j \in I$ on a

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarque. Une famille orthonormée est nécessairement une famille libre de E donc en dimension finie leur cardinal est majorée par la dimension de E. Par ailleurs, si $(e_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille orthonormée et $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ on a

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$$

Proposition 8.1.9 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)**.** *Soit E un espace préhilbertien et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille libre de E. Il existe alors $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n) = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$.*

Démonstration. La construction se fait par récurrence. Notons $F_n = \mathrm{Vect}(f_0, \ldots, f_n)$. Tout d'abord comme la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre, on a $f_0 \neq 0$, on définit alors $e_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|}$. e_0 est donc un vecteur de norme 1 tel que $\mathrm{Vect}(e_0) = F_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons construit une famille orthonormée $(e_k)_{0\leq k\leq n}$ telle que pour tout $0 \leq p \leq n$, $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_p) = F_p$. Comme la famille $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre, $f_{n+1} \notin F_n$ et le vecteur g_{n+1} défini par

$$g_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=0}^{n} \langle f_{n+1}, e_k\rangle e_k$$

est non nul et vérifie $\langle g_{n+1}, e_k\rangle = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$. On définit alors $e_{n+1} = \frac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}$. Notons que par construction $f_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_{n+1})$. La famille $(e_0, \ldots, e_{n+1})$ est alors orthonormée est vérifie $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_p) = F_p$ pour tout $0 \leq p \leq n + 1$. □

Proposition 8.1.10 (Inégalité de Bessel)**.** *Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et $(e_n)_{\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. Soit $x \in E$, on a alors*

$$\|x\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle e_n, x\rangle|^2$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et posons $x_k = \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$. Notons que l'on a

$$\langle x - x_k, x_k\rangle = \langle x, x_k\rangle - \langle x_k, x_k\rangle = \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle \overline{\langle x, e_n\rangle} - \sum_{n=0}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2 = 0$$

Donc d'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x\|^2 = \|(x - x_k) + x_k\|^2 = \|x - x_k\|^2 + \|x_k\|^2 = \|x - x_k\|^2 + \sum_{n=0}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2 \geq \sum_{n=0}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

On obtient alors le résultat en faisant tendre k vers ∞. □

Remarque. En dimension finie, si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, on a une égalité dans l'inégalité de Bessel. Notons aussi qu'en dimension infinie, on a égalité si et seulement si $\lim x_k = x$ c'est à dire si et seulement si la série $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ converge vers x.

8.2 Espaces de Hilbert

8.2.1 Définition

Définition 8.2.1. Un espace préhilbertien E est appelé *espace de Hilbert* si $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

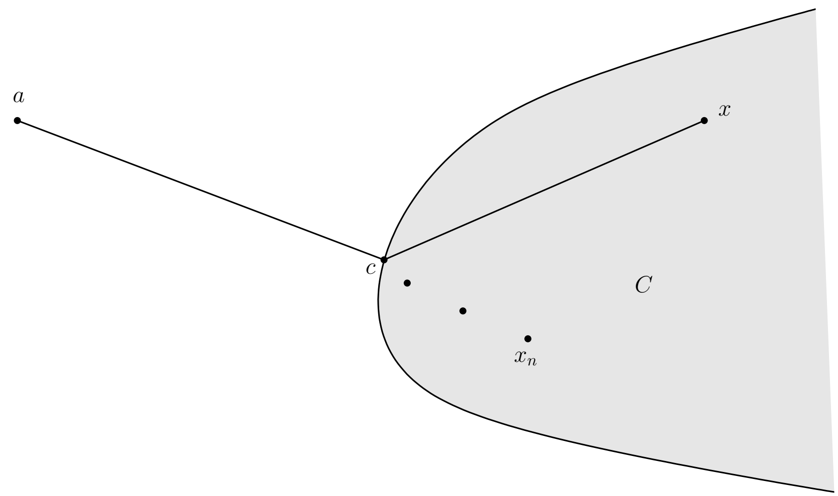

Figure 8.2 – Projection sur un convexe fermé

Exemple. Les espaces vectoriels de dimension finie sont complets donc les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ muni de leur produit scalaire canonique sont des espaces de Hilbert.

Les espaces $\ell^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.

L'espace $C^0([a,b],\mathbb{C})$ munit de la norme associée au produit scalaire

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f|^2 dt\right)^{1/2}$$

n'est pas complet donc pas un espace de Hilbert.

8.2.2 Projection orthogonale

En dimension finie, on sait que $E = F \oplus F^\perp$. En dimension infinie on peut *a priori* juste affirmer que F et $F^\perp$ sont en somme directe. Toutefois dans un espace de Hilbert on peut dire mieux.

Théorème 8.2.2. *Soit E un espace préhilbertien et $C \subset H$ une partie convexe et complète (non vide). Soit $a \in E$. Il existe alors un unique point $c \in C$ tel que*

$$\|a - c\| = d(a, C) = \inf_{x \in C} \|a - x\|$$

De plus, le point c est caractérisé par : pour tout $x \in C$, $\mathrm{Re}(\langle a - c, x - c\rangle) \leq 0$.

Ce point c est appelé projeté orthogonal *de a sur C.*

Démonstration. Par définition de $d(a, C)$, il existe une suite (x_n) de C telle que $d(a, C) = \lim \|a - x_n\|$. Nous allons montrer que (x_n) est une suite de Cauchy de C. Tout d'abord pour x et y dans C, notons que l'on a $\frac{x+y}{2} \in C$ par convexité. Ainsi d'après l'identité du parallélogramme on a

$$\|x-y\|^2+\|2a-x-y\|^2 = \|(a-y)-(a-x)\|^2+\|(a-y)+(a-x)\|^2 = 2(\|a-x\|^2+\|a-y\|^2)$$

Ainsi

$$\|x-y\|^2 = 2(\|a-x\|^2+\|a-y\|^2)-4\|a-\frac{x+y}{2}\|^2 \leq 2(\|a-x\|^2+\|a-y\|^2)-4d(a,C)^2 \quad (8.3)$$

Ainsi pour $x = x_n$ et $y = x_m$ on a

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2(\|a - x_n\|^2 + \|a - x_m\|^2) - 4d(a,C)^2$$

où le terme de droite tend vers 0 lorsque $n, m \to \infty$. Ainsi la suite (x_n) est bien de Cauchy et converge vers $c \in C$ car C est complet. Ainsi il existe $c \in C$ qui réalise $d(a,C)$ si c' est un second point qui réalise la distance, (8.3) avec $x = c$ et $y = c'$ donne $\|c - c'\|^2 \leq 2(\|a - c\|^2 + \|a - c'\|^2) - 4d(a,C)^2 = 0$ et donc $c = c'$.

Il reste à voir la caractérisation. On a pour $b, x \in H$

$$\begin{aligned}\|a-b\|^2 \leq \|a-x\|^2 &\iff \|a-b\|^2 \leq \|(a-b)-(x-b)\|^2\\ &\iff \|a-b\|^2 \leq \|(a-b)\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\langle a-b, x-b\rangle) + \|x-b\|^2\\ &\iff 0 \leq -2\,\mathrm{Re}(\langle a-b, x-b\rangle) + \|x-b\|^2\end{aligned}$$

Ainsi on voit que si $b \in C$ et, pour tout $x \in C$, $\mathrm{Re}(\langle a-b, x-b\rangle) \leq 0$ pour tout $x \in C$, b réalise $d(a,C)$ et donc $b = c$. Réciproquement, si $y \in C$, en appliquant le calcul ci-dessus à $b = c$ et $x = (1-t)c + ty \in C$ $(t \in [0,1])$, on a

$$0 \leq -2t\,\mathrm{Re}(\langle a-c, y-c\rangle + t^2\|y-b\|^2$$

ce qui implique $\mathrm{Re}(\langle a-c, y-c\rangle) \leq 0$ lorsque $t \to 0$. □

Remarque. Dans le cas où $\Bbbk = \mathbb{R}$, la caractérisation s'écrit $\langle a-c, x-c\rangle \leq 0$.

Remarque. Si E est en fait un espace de Hilbert (donc complet), la partie convexe C sera complète si et seulement si C est fermé. Le théorème ci-dessus est souvent appelé théorème de projection sur les convexes fermés d'un Hilbert.

Théorème 8.2.3. *Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel* ***fermé****. Alors $H = F \oplus F^\perp$. De plus si p est le projecteur orthogonal de H sur F, $p(x)$ est l'unique point de F tel que $d(x,F) = \|x - p(x)\|$.*

Démonstration. Tout d'abord notons que F et $F^\perp$ sont en somme directe, il suffit donc de montrer que leur somme est égale à H. F est un convexe fermé de H, donc pour tout $x \in H$ il existe un unique $\pi(x) \in F$ tel que $d(x,F) = \|x - \pi(x)\|$. D'après la caractérisation de $\pi(x)$, pour tout $y \in F$ on a $\mathrm{Re}(\langle x-\pi(x), y-\pi(x)\rangle) \leq 0$. Soit $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, appliquons cela à $y = \pi(x) + \lambda f \in F$. On a $\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\langle x-\pi(x), f\rangle) \leq 0$. Comme λ peut prendre toutes les valeurs complexes cela implique que $\langle x-\pi(x), f\rangle = 0$ autrement dit $x - \pi(x) \in F^\perp$. Ainsi on a montré que $x = \pi(x) + (x - \pi(x)) \in F \oplus F^\perp$. Ainsi π est bien le projecteur orthogonal de H sur F. □

Remarque. Notons que si F est de dimension finie, F est fermé donc le résultat s'applique. Si $(e_1, \ldots, e_n)$ en est un base orthonormée, $p(x)$ s'exprime de la façon suivante :

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$$

Notons aussi que, si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, F est complet comme tout espace de dimension finie et c'est donc un convexe complet de E. Ainsi le résultat ci-dessus s'applique.

Une conséquence de ce résultat est le théorème de représentation de Riesz.

Théorème 8.2.4 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $l : H \to \Bbbk$ une forme linaire continue. Alors il existe un unique $h \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $l(x) = \langle x, h \rangle$*

Démonstration. Si $l \equiv 0$, $h = 0$ convient. Sinon notons $F = \ker l$. F est un sous-espace vectoriel fermé puisque l est continue. Ainsi $H = F \oplus F^\perp$. Notons que $F^\perp$ est de dimension 1 : en effet si $a, b \in F^\perp \backslash \{0\}$ on a $l(l(b)a - l(a)b) = 0$ donc $l(b)a - l(a)b \in F \cap F^\perp$ et donc $l(b)a - l(a)b = 0$ et a et b sont colinéaires. Soit $a \in F^\perp$ avec $\|a\| = 1$. Soit p le projecteur orthogonal de H sur F, on a $x - p(x) = \langle x - p(x), a \rangle a = \langle x, a \rangle a$. Ainsi

$$l(x) = l(x - p(x) + p(x)) = l(\langle x, a \rangle a) = \langle x, a \rangle l(a) = \langle x, \overline{l(a)} a \rangle$$

Si a et $b \in H$ vérifient $\langle x, a \rangle = \langle x, b \rangle$ pour tout $x \in H$. On a $\langle x, a - b \rangle = 0$ et donc, pour $x = a - b$, $\|a - b\|^2 = 0$. Ainsi $a = b$. □

Remarque. Si $l(x) = \langle x, h \rangle$ pour tout x, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne $|l(x)| \leq \|h\| \|x\|$. Ainsi $|||l||| \leq \|h\|$. On a aussi $|l(h)| = \|h\|^2$ donc $|||l||| \geq \|h\|$. Ainsi $|||l||| = \|h\|$.

Si $h \in H$, nous noterons $l_h \in \mathcal{L}_c(H, \Bbbk)$ la forme linéaire continue définie par $l_h(x) = \langle x, h \rangle$. Le théorème de représentation de Riesz peut alors se réinterpréter de la façon suivante. L'application linéaire si $\Bbbk = \mathbb{R}$ (semi-linaire si $\Bbbk = \mathbb{C}$)

$$L : \begin{array}{ccc} (H, \|\cdot\|) & \longrightarrow & (\mathcal{L}_c(H, \Bbbk), |||\cdot|||) \\ h & \longmapsto & l_h \end{array}$$

est un isomorphisme. C'est de plus une isométrie ($|||L(h)||| = \|h\|$).

8.2.3 Bases hilbertiennes

Nous allons ici restreindre notre présentation au cas dénombrable pour éviter quelques difficultés.

Définition 8.2.5. Soit E un espace préhilbertien, une famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *totale* si le sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans E :

$$E = \overline{\mathrm{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})}$$

Si H est un espace de Hilbert, une famille orthonormée totale $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée une *base hilbertienne* de H

Remarque. La définition ci-dessus correspond au cas où H est de dimension infinie. En dimension finie une base hilbertienne de $H = \mathbb{R}^n$ est juste une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Par exemple dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est une base hilbertienne.

Rappelons aussi que $\mathrm{Vect}(e_n; n \in \mathbb{N})$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs e_n, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme

$$\sum_{n=0}^{m} \lambda_n e_n, \qquad \lambda_n \in \mathbb{k}.$$

Par rapport à la suite, il est important de noter que la somme ci-dessus est finie.

Exemple. Regardons ce qu'il se passe dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons δ^k l'élément de $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par

$$\delta_n^k = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} \delta^0 &= (1, 0, 0, 0, \dots) \\ \delta^1 &= (0, 1, 0, 0, \dots) \\ \delta^2 &= (0, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

Tout d'abord remarquons que δ^k est bien un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$ et on a $\langle \delta^k, \delta^m \rangle = 1$ si $k = m$ et 0 sinon. Ainsi la famille $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bien orthonormée.

Montrons que l'espace engendré $\mathrm{Vect}(\delta^k, k \in \mathbb{N})$ est dense. Tout d'abord, l'espace vectoriel engendré par les δ^k est

$$A = \{u \in \mathbb{k}^{\mathbb{N}} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n = 0\}$$

autrement dit l'ensemble des suites ultimement nulles. On a bien A est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$ qui contient les δ^k. Ainsi $\mathrm{Vect}(\delta^k, k \in \mathbb{N}) \subset A$. De plus si $u \in A$ et n_0 est tel que $u_n = 0$ pour $n \geq n_0$, on a $u = \sum_{k=0}^{n_0} u_k \delta^k$ et donc $A \subset \mathrm{Vect}(\delta^k, k \in \mathbb{N})$.

Montrons que A est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Soit donc $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ et pour $k \in \mathbb{N}$, notons $v^k \in A$ la suite

$$v_n^k = \begin{cases} u_n \text{ si } n \leq k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par exemple

$$\begin{aligned} v^0 &= (u_0, 0, 0, 0, \dots) \\ v^1 &= (u_0, u_1, 0, 0, \dots) \\ v^2 &= (u_0, u_1, u_2, 0, \dots) \end{aligned}$$

Montrons que $v^k \to u$ dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On a $\|u - v^k\|_2^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} |u_n|^2$; donc $\|u - v^k\|_2 \to 0$ lorsque $k \to +\infty$. Ainsi A est bien dense et $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

On remarque que $(\delta^k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas une base algébrique de H puisque $\mathrm{Vect}(\delta^k, k \in \mathbb{N}) = A \neq H$. C'est ce qu'il se passe en général en dimension infinie : les bases hilbertiennes ne sont pas des bases algébriques, ce sont juste des familles libres.

La caractérisation des bases hilbertiennes est liée au cas d'égalité dans l'inégalité de Bessel.

Théorème 8.2.6. *Soit E un espace préhilbertien et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E. On a équivalence entre les propriétés suivantes :*

(i) $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est totale*

(ii) Pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \qquad \textit{(Égalité de Parseval)}$$

(iii) Pour tout $x, y \in E$, la série $\sum \langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$ converge et on a

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$$

(iv) Pour tout $x \in E$ la série $\sum \langle x, e_n\rangle e_n$ converge dans E et sa somme vaut x.

Démonstration. $(i) \implies (iv)$. Notons $V_k = \mathrm{Vect}(e_n, n \leq k)$ et $V = \mathrm{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k$. Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme V est dense il existe $y \in V$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Comme $y \in V$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y \in V_k$. Ainsi, pour $l \geq k$, on a $\varepsilon \geq \|x - y\| \geq \|x - x_l\|$ où x_l est le projeté orthogonal de x sur V_l. On a $x_l = \sum_{n=0}^{l} \langle x, e_n\rangle e_n$. On a donc montré que pour $l \geq k$

$$\Big\|x - \sum_{n=0}^{l} \langle x, e_n\rangle e_n\Big\| \leq \varepsilon$$

On a donc $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$.

$(iv) \implies (iii)$. Soit $x, y \in E$. On pose $x_k = \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$ et $y_k = \sum_{n=0}^{k} \langle y, e_n\rangle e_n$, on a $x_k \to x$ et $y_k \to y$ et

$$\langle x_k, y_k\rangle = \sum_{n=0}^{k} \langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$$

Donc par passage à la limite ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ est continue), on a bien $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n\rangle\overline{\langle y, e_n\rangle}$.

$(iii) \implies (ii)$. On applique le résultat avec $x = y$

$(ii) \implies (i)$. On rappelle de la preuve de l'inégalité de Bessel que, pour $x \in E$ et x_k le projeté de x sur V_k,

$$\|x - x_k\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{n=0}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

Donc par passage à la limite $x_k \to x$ et $x \in \overline{V}$. Ainsi $\overline{V} = E$ et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale. $\square$

Remarque. Notons qu'au point (iii) la convergence de la série est absolue. En effet on a $|\langle x, e_n\rangle \overline{\langle y, e_n\rangle}| = |\langle x, e_n\rangle||\langle y, e_n\rangle| \leq \frac{1}{2}(|\langle x, e_n\rangle|^2 + |\langle y, e_n\rangle|^2)$.

Notons aussi que le point (iv) affirme que la série $\sum\langle x, e_n\rangle e_n$ converge, mais il n'affirme pas que la série converge absolument.

Exemple. Si on reprend l'exemple de $\ell^2(\mathbb{N})$, la suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bien un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$. On a $\langle u, \delta^k\rangle = \frac{1}{k+1}$. Le point (iv) affirme que l'on peut écrire

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\delta^k$$

En revanche la série $\sum\|\frac{1}{k+1}\delta^k\| = \sum\frac{1}{k+1}$ diverge. On n'a donc pas de convergence absolue.

8.3 Applications aux séries de Fourier

Commençons par une remarque, dans la section précédente nous avons travaillé avec des familles indicées par $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable, on peut aussi bien travailler avec des familles indicées par $\mathbb{Z}$.

8.3.1 Fonctions continues

Dans cette section, nous allons considérer l'espace vectoriel $E = C^0_{per}(\mathbb{R}, \Bbbk)$ des fonctions continues 2π-périodiques à valeurs dans $\Bbbk$. Nous allons considérer sur cet espace un produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$$

et $\|\cdot\|_2$ la norme associée (la vérification que l'on définit ainsi un produit scalaire est laissée au lecteur). Comme f et g sont 2π-périodiques, on peut intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur 2π sans changer la valeur.

Lorsque $\Bbbk = \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, notons alors $e_n \in E$ définit par $e_n(x) = e^{inx}$. On vérifie alors que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée.

Définition 8.3.1. Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{Z}$, on appelle *n-ième coefficient de Fourier* de f le nombre

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

On a alors le résultat important suivant.

Théorème 8.3.2. *L'espace vectoriel engendré par les e_n (l'espace des polynômes trigonométriques) est dense dans $(E, \|\cdot\|_2)$. Autrement dit la famille (e_n) est totale.*

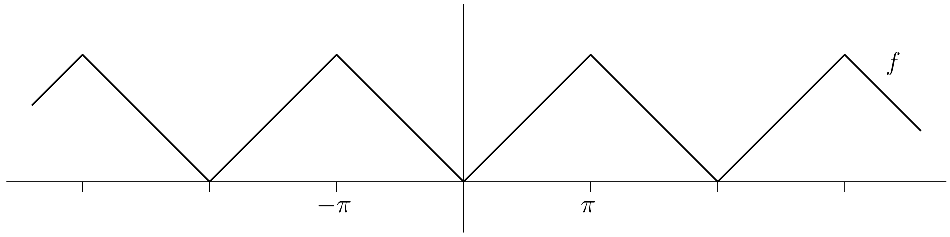

FIGURE 8.3 – Le graphe de la fonction 2π-périodique f

Ainsi le théorème 8.2.6 s'applique et pour toute fonction $f \in E$, on peut donc écrire

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n \tag{8.4}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \tag{8.5}$$

Remarque. Il est important de noter qu'à la première ligne on n'a pas écrit

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$$

qui signifierait que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de nombres complexes de droite converge et que sa somme vaut $f(t)$. Ce n'est pas le cas en général.

Ce que dit le théorème 8.2.6, c'est que la suite de fonctions continues $\sum_{n=-k}^{k} c_n(f) e_n$ converge vers f lorsque $k \to \infty$ pour la norme $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-k}^{k} c_n(f) e^{int} \right|^2 dt \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$$

Ceci est loin d'impliquer une convergence simple ou convergence ponctuelle.

Exemple. Considérons la fonction $f \in E$ définie par $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi]$ (Figure 8.3). On a alors

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}$$

et pour $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |t| e^{-int} dt &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0} -te^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-int}dt\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{0}^{\pi} te^{int}dt + \int_{0}^{\pi} te^{-int}dt\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(nt)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

Ainsi pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $c_{\pm 2p} = 0$ et $c_{\pm(2p-1)} = \frac{-2}{\pi(2p-1)^2}$. Par ailleurs on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$

Ainsi l'égalité de Parseval donne

$$\frac{\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2(2p-1)^4} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

De ce résultat on peut déduire

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)^4} = \frac{1}{16}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p^4} + \frac{\pi^4}{96}$$

Ainsi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Lorsque $\Bbbk = \mathbb{R}$, on préfère considérer les coefficients de Fourier réels associées à une famille orthogonale de $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Définition 8.3.3. Soit $f \in C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$, on appelle *n-ièmes coefficients de Fourier réels* de f les nombres

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt \qquad \text{et} \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

Remarque. On notera la différence d'un facteur 2 pour le coefficient devant l'intégrale par rapport aux coefficients de Fourier complexes. On note aussi que $b_0(f) = 0$ et que

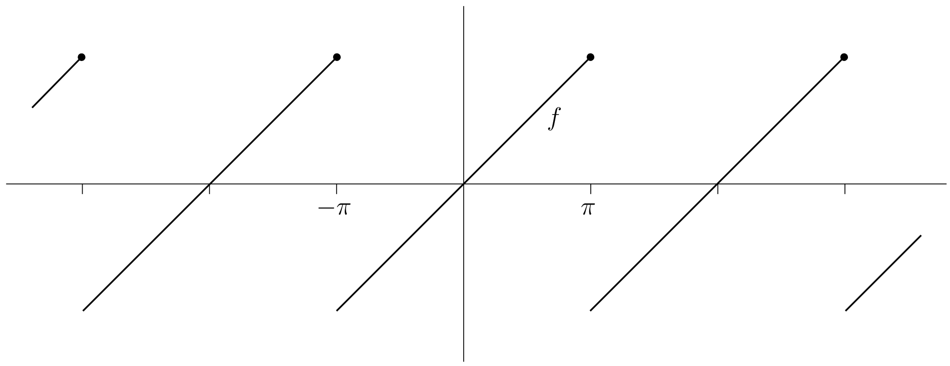

FIGURE 8.4 – Le graphe de la fonction 2π-périodique f

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f)$ et $b_n(f) = ic_n(f) - ic_{-n}(f)$. Ainsi pour $f \in C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (8.4) et (8.5) se réécrivent

$$f = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(n\,\cdot) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(n\,\cdot)$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)dt = \frac{a_0(f)^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right)$$

À nouveau la première ligne est à comprendre au sens de la convergence pour la norme $\|\cdot\|_2$.

8.3.2 Fonctions continues par morceaux

Il est intéressant de constater que les résultats de la sections précédentes peuvent être étendus aux fonctions 2π-périodiques continues par morceaux $C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{k})$.

La remarque préliminaire qu'il faut faire est que la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ne définit plus un produit scalaire sur $C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{k})$: la forme n'est plus définie positive. En effet si f est une fonction nulle sauf en un nombre fini de point, on a $\langle f, f\rangle = 0$ sans que $f = 0$. C'est en fait la seule difficulté.

Toutefois, on remarque que pour tout $f \in C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{k})$, il existe une suite (f_n) de $C^0_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{k})$ telle que $\|f - f_n\|_2 \to 0$. Ceci est suffisant pour assurer que l'égalité de Parseval (8.5) est satisfaite pour toute fonction dans $C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{k})$.

Exemple. Considérons $f \in C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi]$ (Figure 8.4). l'imparité de f sur $]-\pi, \pi[$ assure que $a_n(f) = 0$ pour tout n et

$$\begin{aligned} b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt &= \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nt)}{n}dt \\ &= -2\frac{\cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(nt)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi} = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

Ainsi Parseval donne

$$\frac{2\pi^2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Remarque. On a vu que dans l'espace $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée totale. Toutefois $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_2$ donc ce n'est pas un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas une base hilbertienne.

On a vu que pour $f \in C^{0,pm}_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ il existe une suite (f_n) de $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que $\|f - f_n\|_2 \to 0$. Ceci implique que (f_n) est de Cauchy mais n'est pas convergente dans $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$: c'est le caractère non complet.

On peut se poser la question de l'existence d'un espace de fonctions qui contient $C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui serait muni du même produit scalaire, serait un espace de Hilbert (complet) et dans lequel $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ serait une base hilbertienne. Cet espace existe, il s'agit de l'espace $L^2_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ qui est essentiellement l'ensemble des fonctions mesurables, 2π-périodiques et dont le carré du module est intégrable.

8.3.3 Densité des polynômes trigonométriques

Dans cette partie nous donnons une preuve du Théorème 8.3.2. En fait, nous allons le voir comme une conséquence d'un théorème plus fort.

Théorème 8.3.4. *L'espace des polynômes trigonométriques est dense dans* $(C^0_{per}(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.

On rappelle juste que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ est bien définie pour f continue 2π-périodique.

Démonstration du Théorème 8.3.2. Soit $f \in E$ et (f_n) une suite de polynômes trigonométriques qui converge vers f pour $\|\cdot\|_\infty$. On a alors

$$\|f - f_n\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - f_n(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f - f_n\|_\infty^2 dt\right)^{1/2} = \|f - f_n\|_\infty$$

Ainsi le majorant tend vers 0 et donc $f_n \to f$ pour $\|\cdot\|_2$. □

Pour la démonstration du théorème ci-dessus, on va introduire plusieurs notations :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}$$

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t)$$

Remarque. Les fonctions D_n sont appelées noyaux de Dirichlet et les F_n sont appelées noyaux de Fejér.

Lemme 8.3.5. *La fonction F_n vérifie les propriétés suivantes*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) = 1 \qquad \textit{et} \qquad F_n(t) = \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})} \qquad \textit{pour } t \neq 0[2\pi]$$

On remarque entre autre que F_n est positive.

Démonstration. Notons que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt = 2\pi$ si $n = 0$ et 0 sinon. On en déduit que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1$ et donc la première propriété. Pour la seconde, on a

$$\begin{aligned} D_n(t) = e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt} = e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t}-1}{e^{it}-1} &= e^{-int}\frac{e^{i(2n+1)t/2}}{e^{it/2}}\frac{e^{i(2n+1)t/2}-e^{-i(2n+1)t/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} &= \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{t}{2})}\operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+\frac{1}{2})t}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{t}{2})}\operatorname{Im}\left(e^{it/2}\frac{e^{i(n+1)t}-1}{e^{it}-1}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)\sin(\frac{t}{2})}\operatorname{Im}\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{\sin^2(\frac{n+1}{2}t)}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

□

Sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, on a $\sin(s) \geq \frac{2s}{\pi}$ car sin est concave sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Ainsi si $\delta > 0$ et $t \in [-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$, on a

$$|F_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})} \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2} \leq \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}$$

On peut maintenant démontrer le théorème 8.3.4. Soit $f \in E$ et définissons f_n et g_n par

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k(t) \qquad \text{et} \qquad g_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f_k(t)$$

f_n est un polynôme trigonométrique et g_n est donc aussi un polynôme trigonométrique. Nous allons montrer que $g_n \to f$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Pour cela calculons $g_n(x)$. On a

$$\begin{aligned}
f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_x^{x-2\pi} -f(x-s)D_n(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-s)D_n(s)ds
\end{aligned}$$

Ainsi en sommant, on obtient

$$g_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-s)F_n(s)ds$$

et donc en utilisant le lemme

$$|f(x)-g_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x-s))F_n(s)ds\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f(x-s)|F_n(s)ds$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue et périodique, f est uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout x et $s \in [-\delta, \delta]$ on ait $|f(x)-f(x-s)| \leq \varepsilon$. Ainsi

$$\begin{aligned}
|f(x)-g_n(x)| &\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta}|f(x)-f(x-s)|F_n(s)ds + \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]}|f(x)-f(x-s)|F_n(s)ds\right) \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon F_n(s)ds + \int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} 2\|f\|_\infty \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}ds\right) \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \frac{\pi^2}{(n+1)\delta^2}
\end{aligned}$$

Il existe donc n_0 (indépendant de x) tel que pour $n \geq n_0$, $|f(x)-g_n(x)| \leq 2\varepsilon$ ou encore $\|f-g_n\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Ceci conclut la preuve du théorème.

Annexe A

Les normes $\|\cdot\|_p$

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que les normes $\|\cdot\|_p$ définies au Chapitre 1 sont bien des normes sur $\Bbbk^n$ (Proposition 1.2.3). Pour cela on va avoir besoin quelques notions concernant les fonctions convexes.

A.1 Fonctions convexes

On rappelle qu'un fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite *convexe* si

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Pour une fonction $f \in C^2(I)$, on a l'équivalence

$$f \text{ est convexe} \iff f'' \geq 0$$

Par exemple, la fonction exponentielle est convexe puisque sa dérivée seconde est positive.

L'équivalence ci-dessus découle directement du résultat suivant

Proposition A.1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On a l'équivalence :*

$$f \text{ est convexe} \iff f' \text{ est croissante}$$

Démonstration. Considérons $x < y < z \in I$ et notons $\lambda = \frac{z-y}{z-x} \in]0,1[$ (on a $1-\lambda = \frac{y-x}{z-x}$). On a alors $y = \lambda x + (1-\lambda)z$. Supposons que f est convexe, on a alors

$$f(y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z)$$

ou encore, en écrivant $f(y) = \lambda f(y) + (1-\lambda)f(y)$,

$$\frac{z-y}{z-x}(f(y) - f(x)) \leq \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(y))$$

En multipliant par $\frac{z-x}{(z-y)(y-x)}$, on obtient finalement

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

En faisant tendre y vers x, on obtient $f'(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$. En faisant tendre y vers z, on obtient aussi $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq f'(z)$. Ainsi on a

$$f'(x) \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq f'(z)$$

et f' est bien croissante.

Réciproquement, supposons que f' est croissante et définissons $g(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda(fx) - (1-\lambda)f(y)$ pour $x \leq y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. On souhaite montrer que $g(\lambda) \leq 0$.

Notons que $g(0) = 0 = g(1)$ et que g est dérivable car f l'est. Donc d'après le théorème de Rolle il existe $\lambda_0 \in [0,1]$ tel que $g'(\lambda_0) = 0$. Par ailleurs on a $g'(\lambda) = (x-y)f'(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(x) + f(y)$. Comme $\lambda \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y$ est décroissant, $x - y \leq 0$ et f' est croissante, g' est croissante. Ainsi $g'(\lambda) \leq 0$ pour $\lambda \leq \lambda_0$ et $g'(\lambda) \geq 0$ pour $\lambda \geq \lambda_0$. En résumant dans le tableau de variations ci-dessous, on obtient que $g(\lambda) \leq 0$.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 0 & & \lambda_0 & & 1 \\
\hline
 & & & & & + \\
 & & & & \nearrow & \\
g' & & & 0 & & \\
 & & \nearrow & & & \\
 & - & & & & \\
\hline
 & 0 & & & & 0 \\
g & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & g(\lambda_0) \leq 0 & &
\end{array}$$

□

A.2 Inégalités de Young, Hölder et Minkowski

Afin de démonter l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_p$ nous allons établir une série d'inégalités.

Proposition A.2.1 (Inégalité de Young). *Soit $x, y \geq 0$ et $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a alors*

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \tag{A.1}$$

Démonstration. Notons que si x ou y est nulle l'inégalité est évidente. Supposons donc $x > 0$ et $y > 0$, il existe alors a et $b \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^a$ et $y = e^b$. Comme $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ et la fonction exponentielle est convexe, on a

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q = \frac{1}{p}(e^a)^p + \frac{1}{q}(e^b)^q = \frac{1}{p}e^{pa} + \frac{1}{q}e^{qb} \geq \exp(\frac{1}{p}(pa) + \frac{1}{q}(qb)) = e^{a+b} = e^a e^b = xy$$

L'inégalité de Young est donc établie. □

Proposition A.2.2 (Inegalité de Hölder)**.** *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ *et* $p, q > 0$ *tels que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *On a alors*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{A.2}$$

Démonstration. Nous allons commencer par traiter le cas où $\sum_{i=1}^n a_i^p = 1$ et $\sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. En utilisant l'inégalité de Young (A.1), on a alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \sum_{i=1}^n (\frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n a_i^p + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n b_i^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \tag{A.3}$$

On a donc bien l'inégalité de Hölder dans ce cas.

Notons que, si $\sum_{i=1}^n a_i^p = 0$, on a $a_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et donc les deux termes de l'inégalité de Hölder sont nuls et l'inégalité est vérifiée. De même si $\sum_{i=1}^n b_i^q = 0$. Dans le cas général, nous allons donc supposer que $A = \sum_{i=1}^n a_i^p \neq 0$ et $B = \sum_{i=1}^n b_i^q \neq 0$. On définit alors

$$A_i = \frac{a_i}{A^{1/p}} \text{ et } B_i = \frac{b_i}{B^{1/q}}$$

On constate que $\sum_{i=1}^n A_i^p = 1$ et $\sum_{i=1}^n B_i^q = 1$. Ainsi (A.3) donne $\sum_{i=1}^n A_i B_i \leq 1$ et donc $\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{A^{1/p}B^{1/q}} \leq 1$ ou encore $\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq A^{1/p}B^{1/q}$. Cette dernière inégalité est exactement l'inégalité de Hölder recherchée. □

Proposition A.2.3 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+$ *et* $p \geq 1$. *On a alors*

$$\left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{A.4}$$

Démonstration. Notons que pour $p = 1$ l'inégalité est en fait une égalité. Considérons donc le cas $p > 1$. Posons $q = \frac{p}{p-1}$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant l'inégalité de

Hölder (A.2), on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p &= \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)(a_i+b_i)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)^{p-1} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Notons que $q(p-1)=p$. Notons aussi que si $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p = 0$, on a que $a_i = 0 = b_i$ pour tout i et l'inégalité de Minkowski est satisfaite. Si $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p \neq 0$, en simplifiant dans l'inégalité ci-dessus on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

L'inégalité de Minkowski est donc établie. □

A.3 Les normes $\|\cdot\|_p$

Nous pouvons maintenant établir le résultat attendu

Proposition A.3.1. *Pour $p \geq 1$, $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{k}^n$.*

Démonstration. Par définition on a bien $\|x\|_p \in \mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathbb{k}^n$ et, si $\|x\|_p = 0$, on a $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 0$ donc $|x_i| = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et donc $x = 0$.

On a aussi

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|^p |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(|\lambda|^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x\|_p
\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire on utilise l'inégalité de Minkowski (A.4) et l'inégalité triangulaire pour $|\cdot|$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n (|x_i|+|y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|x\|_p + \|y\|_p\end{aligned}$$

□

Annexe B

L'écriture en base b

L'écriture des nombres entiers sous la forme usuelle, c'est à dire avec des chiffres de 0 à 9, nous est très familière. On parle d'écriture décimale. Par exemple 412 est juste l'écriture d'un nombre entier particulier avec la bonne convention. On aurait pu par exemple aussi l'écrire sous la forme CDXII en utilisant l'écriture romane.

Ce système de numération fait partie de la famille des écritures en base b. Si la base $b = 10$ s'est imposée c'est probablement car nous avons dix doigts. Toutefois dans certaine culture, ce sont d'autres bases b qui se sont imposées [1]. Enfin en informatique, on utilise l'écriture binaire (en base $b = 2$) ou hexadécimale (en base $b = 16$).

Nous allons maintenant présenter des aspects de ces systèmes de numération. Pour cela nous allons fixer un entier $b \geq 2$.

Proposition B.0.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $n < b^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), il existe alors un unique k-uplet $(x_{k-1}, \dots, x_0)$ avec, pour tout i, $x_i \in \{0, \dots, b-1\}$ tel que*

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} x_i b^i$$

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité du k-uplet, supposons donc que $n = \sum_{i=0}^{k-1} x_i b^i = \sum_{i=0}^{k-1} y_i b^i$. Si $(x_{k-1}, \dots, x_0) \neq (y_{k-1}, \dots, y_0)$, considérons $i_0 = \min\{i \mid x_i \neq y_i\}$ et supposons que $x_{i_0} > y_{i_0}$, on a $0 < (x_{i_0} - y_{i_0}) < b$. On a alors

$$0 = \sum_{i=0}^{k-1} x_i b^i - \sum_{i=0}^{k-1} y_i b^i = (x_{i_0} - y_{i_0}) b^{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{k-1} (x_i - y_i) b^i = (x_{i_0} - y_{i_0}) b^{i_0} + b^{i_0+1} \sum_{i=i_0+1}^{k-1} (x_i - y_i) b^{i-i_0-1}$$

Ainsi le reste de la division euclidienne de 0 par b^{i_0+1} est $(x_{i_0} - y_{i_0}) b^{i_0} \neq 0$ ce qui est impossible. L'unicité est démontrée.

La preuve de l'existence se fait par récurrence sur k. Pour $k = 1$, si $n < b^1 = b$ alors $n = nb^0$ et le 1-uplet (n) satisfait l'égalité.

1. On pourra consulter la page `https://fr.wikipedia.org/wiki/Système_de_numération`

Soit $k \geq 1$ et supposons le résultat établi pour $n < b^k$. Soit $n < b^{k+1}$, on écrit alors la division euclidienne de n par b^k : $n = qb^k + r$ avec $r < b^k$ et $q < b$ car $n < b^{k+1}$. Comme $r < b^k$ on peut écrire $r = \sum_{i=0}^{k-1} x_i b^i$. Ainsi le $(k+1)$-uplet $(q, x_{k-1}, \ldots, x_0)$ permet d'écrire n. □

On voit que si $n < b^k$ est associé au k-uplet $(x_{k-1}, \ldots, x_0)$, on peut le voir aussi comme $n < b^{k+1}$, il sera alors associé au $(k+1)$-uplet $(0, x_{k-1}, \ldots, x_0)$. Ainsi pour tout $n > 0$, on peut considérer un k-uplet donné par le résultat ci-dessus $(x_{k-1}, \ldots, x_0)$ avec $x_{k-1} \neq 0$. On dira que ce k-uplet est *l'écriture en base* b du nombre n. On notera $\mathrm{Ec}_b(n) = (x_{k-1}, \ldots, x_0)$, on écrira même $\mathrm{Ec}_b(n) = x_{k-1} \cdots x_0$.

Les nombres inférieurs à $b-1$ qui apparaissent dans l'écriture en base b sont appelés les chiffres en base b. Lorsque $b \leq 10$, on utilise les chiffres classiques de la base 10 : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Lorsque $b > 10$, on utilise d'autres caractères (souvent des lettres) pour désigner les chiffres supérieurs à 10. Par exemple en base 16, on utilise les chiffres par ordre croissant $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

Par exemple, en base 10, le nombre 14 vaut $14 = 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0$, on a donc $\mathrm{Ec}_{10}(14) = 14$. En revanche en base 2, on a $14 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ donc son écriture est $\mathrm{Ec}_2(14) = 1110$. En base 16, on a $\mathrm{Ec}_{16}(14) = E$.

Notons que l'on peut généraliser cette écriture en base b à $n \in \mathbb{Z}$ en utilisant un signe $-$ pour les nombres négatifs.

Nous allons maintenant comprendre comment on peut étendre cette écriture à tout nombre réel positif. Comme tout nombre réel positif x s'écrit $x = n + y$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $y \in [0, 1[$ il nous faut comprendre comment écrire en base b un nombre $y \in [0, 1[$. Soit $(y_i)_{i \geq 1}$ une suite de nombre dans $\{0, \ldots, b-1\}$ et posons

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i}$$

Notons que, comme (y_i) est borné et $b \geq 2$, la série est bien convergente et de plus $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i} \leq (b-1) \sum_{i=1}^{\infty} b^{-i} = (b-1)\frac{1}{b-1} = 1$. Ainsi $y \in [0, 1]$. On souhaite pouvoir dire que l'écriture en base b de y est $0, y_1 y_2 y_3 \ldots$.

L'espace des suites $\{0, \ldots, b-1\}^{\mathbb{N}^*}$ est muni d'une relation d'ordre donnée par l'ordre lexicographique. Si $(y_i)_{i \geq 1}$ et $(z_i)_{i \geq 1}$ sont deux telles suites, on écrira $(y_i) \preceq (z_i)$ si

- soit $(y_i) = (z_i)$
- soit il existe $i_0 \geq 1$ tel que $y_i = z_i$ pour $i \leq i_0 - 1$ et $y_{i_0} < z_{i_0}$ (on note alors $(y_i) \prec (z_i)$)

Notons qu'étant données deux suites (y_i) et (z_i), on a $(y_i) \preceq (z_i)$ ou $(z_i) \preceq (y_i)$

La proposition suivante permet de répondre à la question de l'écriture en base b.

Proposition B.0.2. *Soit $y \in [0, 1]$, il existe alors un suite $(y_i)_{i \geq 1}$ dans $\{0, \ldots, b-1\}$ telle que $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i}$.*

De plus soit $(y_i)_{i \geq 1}$ et $(z_i)_{i \geq 1}$ deux suites de $\{0, \ldots, b-1\}$ telles que $(y_i) \preceq (z_i)$. On a $\sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i b^{-i}$ si et seulement si l'une des propriétés ci-dessous est satisfaite.

- *$(y_i) = (z_i)$ ou*
- *il existe $i_0 \geq 1$ tel que $y_i = z_i$ pour $i < i_0$, $z_{i_0} = y_{i_0} + 1$, $y_i = b - 1$ et $x_i = 0$ pour $i > i_0$.*

Démonstration. Étudions d'abord la partie unicité. Considérons deux suite (y_i) et (z_i) telles que $(y_i) \prec (z_i)$ et $\sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i b^{-i}$. Considérons i_0 donné par la définition de $(y_i) \prec (z_i)$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i} - \sum_{i=1}^{\infty} z_i b^{-i} &= \sum_{i=i_0}^{\infty} (y_i - z_i) b^{-i} \\ &\leq (y_{i_0} - z_{i_0}) b^{-i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} (b-1) b^{-i} \\ &\leq -b^{-i_0} + (b-1) \frac{b^{-i_0}}{b-1} = 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé $y_i - z_i \leq b - 1$ pour $i > i_0$ et $y_{i_0} - z_{i_0} \leq -1$. On a donc égalité dans toutes ces inégalités : $z_{i_0} = y_{i_0} + 1$ et $y_i - z_i = b - 1$ pour $i > i_0$. Comme $y_i, z_i \in \{0, \ldots, b-1\}$ on a $y_i = b - 1$ et $z_i = 0$ pour $i > i_0$. Réciproquement, si (y_i) et (z_i) vérifient l'une des deux propriétés on a l'égalité $\sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i} = \sum_{i=1}^{\infty} z_i b^{-i}$.

Regardons maintenant la partie existence du résultat. Soit $y \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $Y_n = E(b^n y)$. On a $Y_n \in \mathbb{N}$ et $Y_n < b^n$ donc $Y_n = \sum_{i=1}^{n} y_{n,i} b^{n-i}$ d'après la proposition B.0.1. Notons que l'on a $Y_n \leq b^n y < Y_n + 1$ donc $bY_n \leq b^{n+1} y < Y_n + b$ ainsi $bY_n \leq Y_{n+1} < Y_n + b$. Donc $0 \leq Y_{n+1} - bY_n < b$; posons $c = Y_{n+1} - bY_n \in \{0, \ldots, b-1\}$. On a ainsi

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_{n+1,i} b^{n+1-i} = Y_{n+1} = c + bY_n = c + \sum_{i=1}^{n} y_{n,i} b^{n+1-i}$$

Ainsi $y_{n+1,n+1} = c$ et $y_{n+1,i} = y_{n,i}$ pour $i < n$ par l'unicité dans la proposition B.0.1. On peut donc poser $y_i = y_{i,i}$ pour $i \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $Y_n = \sum_{i=1}^{n} y_i b^{n-i}$. On a alors

$$|y - \sum_{i=1}^{n} y_i b^{-i}| = b^{-n} |b^n y - \sum_{i=1}^{n} y_i b^{n-i}| = b^{-n} |b^n y - Y_n| \leq b^{-n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Ainsi $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i}$ □

Ainsi si $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire $x = n + y$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $y \in [0, 1[$. Les propositions ci-dessus permettent d'écrire $n = \sum_{i=0}^{k-1} x_i b^i$ et $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b^{-i}$, on peut donc poser

$$\mathrm{Ec}_b(x) = (x_{k-1}, \ldots, x_0; y_1, y_2, \ldots) \quad \text{ou encore} \quad \mathrm{Ec}_b(x) = x_{k-1} \ldots x_0, y_1 y_2 \ldots$$

Toutefois le manque d'unicité dans la proposition B.0.2 pose un problème car, pour certain x, ce procédé mène à deux écritures possibles

$$x_{k-1} \ldots x_0, y_1 y_2 \ldots y_{i_0} (b-1)(b-1)(b-1) \ldots \quad \text{et} \quad x_{k-1} \ldots x_0, y_1 y_2 \ldots (y_{i_0} + 1) 000 \ldots$$

Dans ce cas, la seconde écriture sera qualifiée de *propre* ou de *réduite*. On écrira même $x_0, y_1 y_2 \ldots (y_{i_0}+1)$ sans faire figurée l'infinité de 0. La première écriture sera qualifiée d'*impropre*. Les nombres pour lesquels cette ambiguïté apparaît sont donc ceux qui peuvent s'écrire de la forme $\sum_{i=-n}^{k-1} x_i b^i = (\sum_{i=-n}^{k-1} x_i b^{i+n}) b^{-n}$. Ce sont donc ceux de la forme Nb^{-n} avec $N \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Ces nombres sont appelés *nombres b-adiques*. Si $x \in \mathbb{R}_-$, on étend ces notions par l'ajout d'un signe.