UNIVERSITÉ DE TOURS– L2– GÉOMÉTRIE 2020-2021

Feuille 5

Exercice 1 Soient $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C)$ trois points du plan $\mathbb{R}^2$.
1- Montrer que ces trois points sont alignés ssi

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

2- Soient D_1, D_2, D_3' trois droites d'équation cartésienne respective

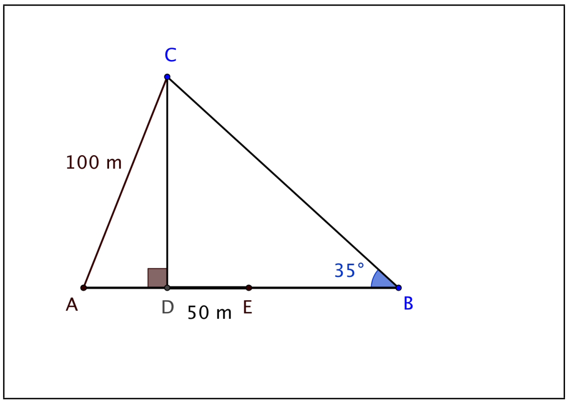
$$a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Montrer que D_1, D_2, D_3 sont paralléles ou concourantes ssi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

Exercice 2 Soient (ABC) un triangle dont les angles en A (resp. B, C) sont α (resp. β, γ) et dont les longueurs des côtés (AB) (resp. $(BC), (AC)$ sont c (resp. a, b).

1. Redémontrer la formule des cosinus $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
2. Redémontrer la formule des sinus $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
3. Montrer que la distance du centre de gravité aux sommets d'un triangle est $|GA|^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{9}$



Exercice 3
Soient A, B, C un triangle. Soit E le milieu de AB ; soit D le pied de la hauteur du triangle passant par C. Sachant que $AC = 100m, DE = 50m$ et que l'angle interne en B est de 35 degrés, déterminer les autres angles du triangle.

Exercice 4 Soient $A = (a_1, a_1)$, $B = (b_1, b_2)$, $C = (c_1, c_2)$ des points de $I\!R^2$. a) Ecrire le système d'équations linéaires dont (x, y, z) doit être solution pour que l'on ait $x\,\vec{OA} + y\,\vec{OB} + z\,\vec{OC} = 0$.
Vérifier que $x = \det(\vec{OB}, \vec{OC})$, $y = \det(\vec{OC}, \vec{OA})$, $z = \det(\vec{OA}, \vec{OB})$ est solution de ce système.
b) Redémontrer la relation $\det(\vec{OB}, \vec{OC})\ \vec{OA} + \det(\vec{OC}, \vec{OA})\ \vec{OB} + \det(\vec{OA}, \vec{OB})\ \vec{OC} = 0$ en Őécrivant $\vec{OC} = \lambda\vec{OA} + \mu\vec{OB}$.
c) Déduire de ce qui précède que l'origine O est barycentre des points A, B, C, affectés de poids égaux aux aires (algébriques) des triangles OBC, OCA et OAB respectivement. Retrouver ce résultat en remarquant que les triangles OAB et OCA ont un côté commun et en comparant les hauteurs correspondantes.
d) Calculer les coordonnées barycentriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport aux sommets du triangle.
Exercice 5 a) Soit Δ une pièce triangulaire de hauteur négligeable et de masse volumique uniforme ; montrer que le centre de gravité de la pièce est l'isobarycentre du triangle .
b) Montrer que la bissectrice d'un triangle divise le coté opposé dans le même rapport que le rapport des longueurs des cotés adjacents.
En déduire le centre de gravité du bord d'un triangle de masse linéique uniforme en fonction de l'isobarycentre et du centre du cercle inscrit à ce triangle.
Exercice 6 On notera $h_{O,\rho}$ l'homothétie de centre O et de rapport ρ. Soit M un point du plan ; soit $M' := h_{O,\rho}(M)$; on rappelle que M' est déterminé par l'équation vectorielle

$$\vec{OM'} = \rho\vec{OM}$$

1. Soient O et O' deux points distincts du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient $h_{O,\rho}$ (respectivement $h_{O',\rho'}$) une homothétie de centre O (respectivement O') et de rapport ρ (respectivement ρ'). Montrer que si $\rho\rho' \neq 1$, la dilatation $h_{O',\rho'} \circ h_{O,\rho}$ est une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport (indication: le centre de l'homothétie $h_{O',\rho'} \circ h_{O,\rho}$ est sur la droite (OO').

2. Soit A, B, C trois points du plan non colinéaires et P, Q et R trois points distincts appartenant respectivement aux droites (A, B), (B, C) et (C, A). On choisit un point du triangle, A, qui ne soit pas sur la même droite que P, Q et R (dans le cas où ces derniers seraient colinéaires).
   Soient ρ_P, ρ_Q et ρ_R les homothéties de centres respectifs P, Q et R qui envoient respectivement A sur B, B sur C et C sur A.

   (a) Exprimer le rapport de l'homothétie ρ_P en fonction des longueurs algébriques $\overline{PA}$ et $\overline{PB}$; procéder de même pour ρ_Q et ρ_R.
   (b) Trouver le rapport de l'homothétie $\rho = \rho_R \circ \rho_Q \circ \rho_P$ et montrer que $\rho(A) = A$.
   (c) En déduire que si P, Q, R sont alignés, alors ρ est l'identité et $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1$.
   (d) Montrer réciproquement que si ρ est l'identité alors les centres P, Q, R sont alignés.

Exercice 7 Dans le plan affine euclidien orienté, on consid̀re un triangle ABC équilatéral. On choisit un point D du segment [BC] et on construit les points E et F de sorte que les triangles DEC et BFD soient équilatéraux directs . Démontrer que les centres respectifs I, J,K des trois triangles forment eux-même un triangle équilatéral.
Exercice 8 Montrer que le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'intersection des hauteurs d'un triangle (non plat) sont alignés dans cet ordre , le centre de gravité étant deux fois plus proche du centre du cercle que de l'orthocentre.
(indication: on peut introduire le centre de l'homothétie qui envoie le triangle sur le triangle des milieux et observer que les médiatrices du triangle d'origine sont envoyés sur les hauteur du triangle des milieux)
Exercice 9
Soit d une droite du plan affine. On associe à tout point M le projeté orthogonal de M sur d noté P. On

définit alors une application $c_{d,x}$ du plan affine dans lui-même telle que $f(M) = M'$ avec

$$\overrightarrow{PM'} = x\overrightarrow{PM}$$

où $x \neq 0$.
1. Montrer que $c_{d,x}$ est bien définie et que c' est une transformation affine. ($c_{d,x}$ est par définition la compression d'axe d et de rapport x)
2. On suppose que d est la droite d'équation $y = 0$. Donner l'expression analytique de $c_{d,x}$.
3. Pour quelles valeurs de x, $c_{d,x}$ est une isométrie?
4. Soit d' une droite perpendiculaire à d et soit O le point d'intersection. On appelle rotation hyperbolique la composée : $r_{O,x} := c_{d',\frac{1}{x}} \circ c_{d,x}$.On suppose que d (resp. d') est la droite d'équation $y = 0$ (resp. $x = 0$). Montrer que les hyperboles d'équation $x \cdot y = c$ sont stables par $r_{O,x}$.