Université de Tours Année 2021-22
S3 - L2 Géométrie élémentaire

TD Feuille 1

(Géométrie vectorielle)

Exercice 1

1°) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et (F_i) une famille de sous-espaces vectoriels. Montrer que $\cap_i F_i$ est un sous-espace vectoriel.
2°) Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Effectuer un dessin dans le cas $E = \mathbb{R}^2$.
3°) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler la définition de $F + G$ et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel.
4°) On donne $E = \mathbb{R}^3$, $H_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + \alpha.z = 0\}$. Trouver $H_\alpha \cap H_\beta$ et $H_\alpha + H_\beta$.

Exercice 2

1°) Montrer que l'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ muni de la composition des applications est un groupe G non commutatif dès que $n \geq 2$.
2°) Montrer que le centre de G est constitué de l'ensemble des homothéties.

Exercice 3 (sous-espaces vectoriels supplémentaires)

1°) Rappeler deux définitions de deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G d'un espace vectoriel E.
2°) On considère $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x + y + z = 0\}$. Montrer que

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ ;\ x - 2y + z = x + y - 2z = 0\}$$

est un supplémentaire de F et préciser la dimension de chacun de ces sous-espaces ainsi qu'une base de chacun d'eux.
3°) Décrire tous les sous-espaces supplémentaires de F.
4°) Soit $\mathrm{v} \in \mathbb{R}^3$. Posons $\mathrm{v} = \mathrm{v}_F + \mathrm{v}_G$ avec $\mathrm{v}_F \in F$ et $\mathrm{v}_G \in G$. Montrer que les deux applications

$$p_F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{v} & \mapsto & \mathrm{v}_F \end{array} \qquad\qquad p_G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{v} & \mapsto & \mathrm{v}_G \end{array}$$

sont bien définies et linéaires.
5°) Déterminer $Ker(p_F)$, $Im(p_F)$ ainsi que les éléments propres de cette application.
6°) Que vaut $p_F \circ p_G$? Que vaut $p_F + p_G$? On pose par la suite $s = p_F - p_G$.
7°) Montrer que $s \circ s = Id_{\mathbb{R}^3}$. Quelle est la nature géométrique de la transformation s ? Donner ses éléments propres.
8°) Donner l'expression analytique de p_F, p_G et celle de s.

Exercice 4

Sur $\mathbb{R}^2$, on définit le produit scalaire canonique : si $\mathrm{v} = (v_1, v_2)$ et $\mathrm{w} = (w_1, w_2)$,

$$< \mathrm{v}, \mathrm{w} >= v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul et on dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont orthogonaux si tout vecteur du premier est orthogonal à tout vecteur du second.

1°) Calculer

$$< \mathrm{v} + \mathrm{w}, \mathrm{v} + \mathrm{w} > - < \mathrm{v}, \mathrm{v} > - < \mathrm{w}, \mathrm{w} > .$$

2°) On se donne dans cette question deux sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G et l'on note $s = p_F - p_G$ comme dans l'exercice précédent. Déduire (en partie) de la première question que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (i) & \forall\, \mathrm{v} \in \mathbb{R}^2,\ < s(\mathrm{v}), s(\mathrm{v}) >=< \mathrm{v}, \mathrm{v} >, \\ (ii) & \forall\, \mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathbb{R}^2,\ < s(\mathrm{v}), s(\mathrm{w}) >=< \mathrm{v}, \mathrm{w} >, \\ (iii) & F \text{ et } G \text{ sont deux sous}-\text{espaces orthogonaux} \end{array}$$

Exercice 5

Dans le plan vectoriel euclidien rapporté à un repère orthonormé, soit D_α (pour $\alpha \in [0, \pi[$ fixé) la droite vectorielle dont une équation cartésienne est

$$x \sin\alpha - y \cos\alpha = 0.$$

1°) Dessiner cette droite et préciser un vecteur orthogonal à cette droite.
2°) Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale s_α relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
3°) Décrire le plus précisément possible le groupe engendré par s_α et s_β.