Logique des prédicats du 1er ordre

Savoirs : notions théoriques

3.1.1. Représentation de base en LP1: prédicat, constante, variable libre et liée
3.1.2. Syntaxe de la LP1 : formule bien formée (fbf)
3.1.3. Quantificateurs existentiels et universels
3.1.4. Forme clausale
3.1.5. Substitution
3.1.6. Unification
3.1.7 Formule de réfutation et méthode de résolution
3.1.8. Décidabilité de la LP1

Savoirs faire : pratiques

3.2.1. Représenter un problème en LP1, savoir détecter quand cette logique est nécessaire
3.2.2. Calcul des prédicats : interprétation des quantificateurs
3.2.3. Rechercher par démonstration une interprétation
3.2.4. Mettre une formule sous sa forme clausale (forme prenexe et Skoelemisation)
3.2.5. Rechercher un unificateur entre deux formules
3.2.6. Prouver la validité d'un raisonnement par la méthode de résolution appliquée en LP1

1. INTRODUCTION

Le chapitre précédent, consacré à la logique des propositions, nous a permis de découvrir tous les éléments (mise sous forme normale, principe de réfutation, méthode de résolution) nécessaires à l'étude de validité des raisonnements logiques. Toutefois, la logique des propositions est insuffisante pour rendre compte de tous les raisonnements logiques correspondant à l'entendement humain. A titre d'illustration, considérons le raisonnement suivant … dont on ne discutera pas ici des implications théologiques !

(P1) *Toute personne coupable est condamnée*

(P2) *Caïn est coupable*

(P3) *Abel n'est pas coupable*

(P4) *Si quelqu'un est coupable, son frère ne l'est pas toujours*

(C) donc *Caïn est condamné*

Tentons de représenter ce raisonnement en logique des propositions. Il est possible de représenter la première prémisse (P1) comme suit : `Coupable` ⇒ `Condamné`. Si l'on considère maintenant les prémisses (P3) et (P4), on peut imaginer d'utiliser de même les représentations suivantes :

(P2) `Caïn` ⇒ `Coupable`

(P3) `Abel` ⇒ ⌉`Coupable`

C'est lorsque nous mettons en relations toutes ces formules bien formées qu'un hiatus apparaît. Cherchons en effet à donner une définition précise pour les atomes que nous venons d'utiliser. On peut définir :

- `Caïn` est vrai si l'entité sur laquelle on raisonne est *Caïn*.
- `Abel` est vrai si l'entité sur laquelle on raisonne est *Abel*.

A l'opposé, on est bien en mal de donner une définition claire pour l'atome `Coupable`. Dans le cas de la prémisse (P1), le jugement `Coupable` concerne a priori toute personne. Alors que dans (P2) il ne concerne que *Caïn* et dans (P3) *Abel* . Il y a ici une confusion qui est d'autant plus claire que si l'on considère (P2) en premier, on voit que l'atome recevra l'interprétation *Vrai*, et *Faux* si on commence au contraire par (P3). Pour s'en sortir, recourir à des atomes spécifiques tels que `Cain_Coupable` et `Abel_Coupable` n'est pas plus satisfaisant, puisqu'on ne peut relier ces atomes au jugement générique `Coupable`. Ces confusions ne proviennent pas d'une mauvaise modélisation : la logique des propositions ne permet tout simplement pas la représentation de raisonnements où l'on passe d'une généralité universelle (P1) a des jugements particuliers (P2 et P3). Par ailleurs, on peine à représenter en logique des propositions la notion de *frère_de* introduite dans la prémisse (P4)

La logique des prédicats du 1er ordre va nous permettre de surmonter ces écueils. Pour avoir une première idée de ce langage formel, nous allons réécrire le raisonnement sous une forme équivalente mais qui rend explicite les rapports entre jugements universels ou particuliers :

(P1) *Pour tout x, si x est coupable alors x est condamné*

(P2) *Caïn est coupable*

(P3) *Abel n'est pas coupable*

(P4) *Il existe au moins un x tel que x est coupable et son frère ne l'est pas*

(C) donc *Caïn est condamné*

Dans cette nouvelle formulation, on trouve un certain nombre d'éléments qu'il faudra représenter sans que ce fut possible en logique des propositions :

- ***x* : variable** – Les *x* que l'on observe dans le raisonnement représentent des concepts quelconques de l'univers du discours qui ne sont pas définis précisément comme *Abel* et *Caïn* : pour les représenter, on fera appel en logique des prédicats à la notion de variable, telle que déjà rencontrée en mathématiques ou en programmation.
- ***Abel, Caïn* : constantes** – Au contraire, *Abel* et *Caïn* sont des éléments bien définis du discours. En logique des propositions, ils n'étaient pas représentés comme tels mais associés à un jugement porté sur eux (exemple « `Cain_Coupable` »). En logique des prédicats, on utilisera au contraire la notion de constante, rencontrée en programmation.

Remarque : les variables et les constantes nous servent ainsi à représenter les objets du monde que l'on désire modéliser dans un raisonnement. On appelle d'une manière générale ***termes*** ces références au monde du discours.

- ***Coupable* : prédicat** – Les prédicats correspondent à des jugements élémentaires dont la valeur de vérité n'est plus absolue, comme en logique des propositions, mais dépend au contraire des variables ou constantes, auxquels ils sont associés. Une fois encore, en analogie avec ce que l'on rencontre en mathématiques ou en programmation, on dira que ces variables ou constantes sont les arguments du prédicat. Pour un prédicat donné, le nombre d'argument est donné a priori : on appellera justement **arité** le nombre d'arguments d'un prédicat. Ainsi, `Coupable` sera dans notre exemple un prédicat d'arité 1, et on pourra écrire `Coupable(x)` ou `Coupable(Jean)`. L'interprétation en français de ces formules atomiques est immédiate et on saisit comment les prédicats permettent de répondre à notre souci de mise en correspondance du jugement générique et du jugement particulier.

> ***Notation*** : à l'avenir, la notation `Coupable/1` signifiera : `Coupable` est un prédicat d'arité 1.

> ***Remarque*** : les atomes de la logique des propositions ne sont en fait que les prédicats d'arité 0 de la logique des prédicats du 1er ordre. La logique des propositions est ainsi simplement un sous-ensemble de la logique des prédicats.

- ***Frere* : fonction** – La notion de *frère* ne correspond pas à un prédicat. En effet, il n'est pas possible de lui associer une valeur de vérité. Il s'agit simplement d'un élément du discours qui est défini à partir d'un ou plusieurs arguments correspondant eux aussi à des éléments du discours. Pour représenter cette application d'un ou plusieurs éléments du discours vers un autre, on reprend la notion de fonction vue en mathématique et programmation là encore. Une fonction a, comme un prédicat, une certaine arité. On peut ainsi définir une fonction d'arité 1 `frere_de` et écrire 1 `frere_de(x)` ou 1 `frere_de(Jean)`. D'une manière générale, une fonction d'arité n prend ainsi en entrée *n* termes et leur fait correspondre un autre terme. En ce sens, on parle ici de terme fonctionnel, pour bien montrer qu'une fonction et ses arguments constitue elle aussi un terme, i.e. une représentation d'un objet du monde.

- ***Pour tout x, il existe x* : quantificateurs** – Nous avons vu que la variable *x* énoncée dans notre exemple peut être aussi bien reliée à une vérité valable pour tous les éléments du discours, ou seulement par certains (au moins un) d'entre eux. Pour différencier ces deux utilisations des variables, on introduit la notion de quantificateur, déjà rencontrée en mathématiques :

> **Quantificateur universel** $\forall x$ « *pour tout x* » ou « *quel que soit* x »
>
> **Quantificateur existentiel** $\exists x$ « *il existe (au moins) un x* »

- **Connecteurs logiques** – Si la logique des prédicats du 1er ordre permet de représenter les rapports entre jugements particuliers et génériques, l'articulation logique entre jugement reste la même que celle rencontrée en logique des propositions, qu'elle englobe par ailleurs. Nous utiliserons donc ici les mêmes connecteurs qu'en logique des propositions.

Question de cours

Question 3.1. Quelle logique choisir ? (objectif 3.2.1.)

Lorsqu'on a un problème à modéliser, se pose la question du choix de la théorie logique à appliquer. Dans le cas de cet enseignement, le problème de décision se limite entre la logique des propositions et celle des prédicats. Pour chacun des exemples suivants, pouvez-vous dire logique est utilisable ? Si les deux logiques sont pertinentes, précisez laquelle vous semble toutefois la plus adaptée :

1. Situation où l'on raisonne sur un élément unique. Exemple : *Si Paul est fatigué il va se coucher. S'il est en forme, il va au cinéma*
2. Situation où l'on raisonne sur plusieurs éléments individuels. Exemple : *si la Suisse perd alors la France est qualifiée, alors que si la Suisse gagne, il faut que la France batte le Portugal.*
3. Situation où l'on raisonne sur des éléments génériques et certains éléments individuels pris parmi ces éléments génériques. Exemple : *Les rivières ont toutes débordé de leur lit. Le Loiret est une rivière. Donc le Loiret a débordé.*
4. Situation où l'on raisonne sur des éléments génériques uniquement. Exemple : *Si les hommes sont des primates, les chimpanzés le sont également.*

Ce paragraphe introductif nous a permis d'introduire de manière informelle les nouvelles notions mobilisées par la logique des prédicats du 1er ordre. Nous allons maintenant donner une description formalisée de la syntaxe de ce nouveau langage logique.

2. LANGAGE DES PREDICATS DU 1ER ORDRE

2.1. VOCABULAIRE

L'alphabet sur lequel est construite la logique des prédicats du 1er ordre est le suivant :

Symboles réservés aux connecteurs logique { ⌉, ⇒, ⇔, ∧, ∨, ⊕, etc…}

Symboles réservés de quantification { ∃, ∀ }

Symboles permettant de construire termes et formules complexes { (,) }

Constantes	{toute chaîne de caractères commençant par une majuscule, $\mathcal{V}$, $\mathcal{F}$}
Variables	{toute chaîne de caractères commençant par une minuscule}
Fonctions	identificateur : toute chaîne de caractères commençant par une minuscule terme fonctionnel : `identificateur(argument`$_1$`, … , argument`$_n$`)`
Prédicat	identificateur : toute chaîne de caractères commençant par une majuscule terme fonctionnel : `Identificateur(argument`$_1$`, … , argument`$_n$`)`

Ainsi par exemple :

- `Socrate`, `C3PO`, `J` sont des constantes
- `robot`, `x` sont des variables … mais également `socrate`.
- `Coupable(x)`, `Coupable(Cain)` sont des termes prédicatifs
- `frere(x)`, `frere(Cain)` sont des termes fonctionnels

2.2. SYNTAXE

Les règles de construction du langage à partir du vocabulaire ci-dessus sont alors les suivantes :

Termes Ce sont tous les éléments de désignation des éléments du problème. Ils regroupent les constantes, les variables ainsi que les termes fonctionnels définis si avant. Formellement, si on considère une fonction d'arité n identifiée par `f`, alors si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme.

Formule atomique Une formule atomique désigne un jugement de base. Formellement, si `P` est l'identificateur d'un prédicat d'arité n supérieur ou égal à 1 (noté `P/n`), et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors $P(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule prédicative. Dans le cas où `P` est un prédicat d'arité 0 (noté `P/0`), `P` est une formule prédicative.

Formules bien formées – Les fbf de la logique des prédicats du 1er ordre (LP1) se construisent alors de manière résursive comme suit :
- une formule atomique est une fbf de la LP1
- si Ψ et Φ sont des fbf de la LP1, alors (Φ), ⌉Φ, Φ ⇒ Ψ, Φ ⇔ Ψ, Φ∧Ψ, Φ∨Ψ, Φ⊕Ψ … sont des fbf de la LP1
- si Φ est une fbf de la LP1 et si x et y sont des variables, ∀x Φ et ∃ x Φ sont alors des fbf de la LP1.

Remarque – On parle de logique des prédicats de 1er ordre car seul un terme pour être considéré comme argument d'une fonction ou d'un prédicat. Les logiques d'ordre supérieur autorisent au contraire que, par exemple, une formule atomique soit considérée comme argument. L'étude de ces logiques d'ordre supérieur dépasse nos propos ici.

Priorités – Par ailleurs, on a les priorités d'opérateurs suivantes : les connecteurs {⌉, ∀, ∃} sont prioritaires sur les connecteurs {∧,∨,⊕} qui sont eux-mêmes prioritaires sur les connecteurs {⇒,⇔}.

Lorsque l'on désire exprimer une priorité dans l'application entre opérateurs différente de cet ordre standard, on utilisera à dessein les parenthèses comme en logique des propositions. Considérons par exemple les deux énoncés logiques :

(1) $\text{Ami(Jean,Paul)} \wedge \text{Coupable(Jean)} \Rightarrow \text{Condamne(Jean)}$

(2) $\text{Ami(Jean,Paul)} \wedge \mathbf{(}\text{Coupable(Jean)} \Rightarrow \text{Condamne(Jean)}\mathbf{)}$

Dans le cas de l'exemple (1), la conjonction $\wedge$ s'applique prioritairement sur l'implication □ : on doit comprendre que ce n'est que si Jean est à la fois l'ami de Paul et qu'il est coupable que Jean pourra être condamné. Alors que dans l'énoncé (2), les parenthèses imposent l'application prioritaire de l'implication $\Rightarrow$: on affirme donc que Jean est l'ami de Paul et qu'en outre, c'est si Jean est coupable qu'il sera condamné.

Les parenthèses sont également essentielles pour représenter proprement quelles variables s'appliquent à quels quantificateurs dans une formule. Nous étudierons ce point important dans le paragraphe immédiatement suivant. Pour le moment, constatons que cette définition du langage nous permet de représenter l'exemple introductif initial dans la logique des prédicats du 1er ordre :

(P1) $\forall x\ (\ \mathtt{Coupable(x)} \Rightarrow \mathtt{Condamne(x)}\ )$

(P2) $\mathtt{Coupable(Cain)}$

(P3) $\neg\mathtt{Coupable(Abel)}$

(P4) $\exists x\ (\mathtt{Coupable(x)} \wedge \mathtt{Coupable(frere(x))})$

(C) $\mathtt{Condamne(Cain)}$

On observe en particulier dans cette traduction que dans la prémisse (P4), la fonction `frere` appliquée à la variable `x` donne bien un terme (nouvel élément du discours) sur lequel peut être appliqué le jugement `Coupable` pour former une formule atomique.

Par ailleurs, l'utilisation de quantificateurs universels et existentiels nous permet par ailleurs de bien modéliser les rapports en jugements génériques et spécifiques. Là était notre objectif, qui a été satisfait par le passage de la logique des propositions à la logique des prédicats. Face à un problème, il sera important désormais d'identifier quelle logique est la plus à même de rendre compte de ce dernier. Il est en effet inutile de recourir à la logique des prédicats si la logique des propositions est suffisante pour la modélisation.

2.3. VARIABLES LIBRES & VARIABLES LIEES (hors programme L1)

Étudions les deux énoncés suivants, que l'on va chercher à représenter en logique des prédicats :

(2.1) *Il y a des gens riches et avares*
(2.2) *Il y des gens qui sont riches et d'autres qui sont avares*

Ces deux énoncés peuvent être représentés comme suit en LP1 :

(T2.1) $\exists x\ (\ \mathtt{Riche(x)} \wedge \mathtt{Avare(x)}\ )$

(T2.2) $\exists x\ \mathtt{Riche(x)} \wedge \exists y\ \mathtt{Avare(y)}$

On observe que dans la première traduction, la variable *x* concerne à la fois le jugement sur la fortune de l'élément du discours qu'elle représente, et sur son caractère avare. On dit que les deux occurrences de `x` dans `Riche(x)` et `Avare(x)` sont **liées**, car elles sont dans la **portée** du même quantificateur $\exists x$, ce dont témoigne la parenthèse qui englobe les deux formules atomiques. On définit ainsi la notion de portée :

Portée d'un quantificateur – la portée d'un quantificateur est la partie de la formule bien formée à laquelle il s'applique

A l'opposé, on a utilisé une nouvelle variable dans l'exemple (T2.2.) pour bien signifier que les personnes riches et avares ne sont pas les mêmes. Pourtant, il n'y a pas de confusion possible entre ces deux variables, puisque leur portée est différente : nous avons en effet deux quantificateurs dont la portée ne se confond pas. On aurait ainsi pu écrire la formule à l'aide d'une seule variable

(T2.2bis) $\exists x\ \mathtt{Riche(x)} \wedge \exists x\ \mathtt{Avare(x)}$

On observe immédiatement que l'on est en présence de deux variables différentes (quoique de même nom) et non de deux occurrences liées de la même variable, puisqu'elles appartiennent à des portées de quantificateurs différentes : il n'y a pas de confusion possible. On définit la notion de variable liée comme suit

Variable liée – Une variable x est dite liée si ses occurrences sont dans la portée du quantificateur qui l'introduit

Variable libre – Une variable x est dite libre si elle n'est pas liée. C'est le cas s'il n'est pas dans la portée d'un quantificateur,

Formule close – Une formule est dite close si tous les occurrences de ses variables sont liées.

Formule ouverte – Une formule est dite ouverte si au moins une de ses variables est libre

Exemple – Considérons la formule suivante : $\exists x\ (Riche(x) \wedge Avare(y))$.
Cette fbf est une formule ouverte puisque, si la variable x est liée, la variable y est libre de son côté.

L'utilisation de formules ouvertes n'a aucun intérêt pratique en informatique (et ne correspond à aucune situation dans un raisonnement humain ou un problème). Elle est toutefois autorisée d'un point de vue purement formel.

De même, l'utilisation du même identificateur pour des variables différentes comme dans (T2.2bis) est à proscrire. A la fois pour des raisons de lisibilité : nous retrouvons là une règle de base de nommage des variables en programmation, à savoir qu'il est fortement déconseillé de réutiliser la même variable pour des usages différents dans un code. Par ailleurs, si dans l'exemple (T2.2bis) les variables ont bien une portée différente, nous pouvons être amenés à transformer cette dernière par exemple pour une mise sous forme causale. Dans ce cas, les transformations réalisées peuvent nous conduire à changer la portée des variables (voir ultérieurement la mise sous forme prénexe). Il risque d'en découler des conflits de portée du type comme dans l'exemple suivant :

$$\exists x \exists x\ (Riche(x) \wedge Avare(x))$$

Pour éviter ce genre de confusion (on parle ici de formule impropre), il est donc recommandé de renommer les variables dès que nécessaire.

Question de cours

Question 3.2. Syntaxe LP1

Précisez si les énoncés ci-dessous constituent des formules bien formées de la logique des prédicats du 1er ordre ou si, au contraire, elles enfreignent les règles de sa syntaxe. On précisera alors où se situe le problème. Attention : il n'est pas demandé de juger de la pertinence (sémantique) de ces formules mais simplement de leur appartenance au langage formel (syntaxe) de la LP1.

1. $\forall xy\ (\ Humain(x)\ \wedge Humain(y)\ \Rightarrow\ Amis(x,y)\ )$
2. $\forall x\ (\ Humain(x)\ \wedge Humain(y)\ \wedge\ Chien(Titus)\ )$
3. $\exists y\ Amis(Paul,y)$
4. $\exists y\ Amis(Paul,Virginie)$
5. $Fatigue(x)$
6. $Fatigue(Droopy)$
7. $\neg\exists y\ Amis(Paul,y)$
8. $\forall x\ (\ Humain(x)\ \Rightarrow\ Humain(frere(x))\ )$
9. $\forall x\ frere(x)$
10. $\forall x\ Humain(frere(frere(x)))$
11. $\forall x\ \exists y\ (Humain(Amis(x,y)))$

Question 3.3. Traduction LP1

Traduire en LP1 des énoncés suivants en utilisant les prédicats : Eldien/1, Mahr/1, , Dans_Armee/2, Titan/1, Plus_grand_que/2

1. Tous les titans sont eldiens
2. Le *Cuirassé* est un titan
3. Il existe des titans dans l'armée Mahr
4. Le titan *Originel* est dans l'armée eldienne
5. Le titan *Colossal* est le plus grand de tous les titans

3. CALCUL DES PREDICATS DU 1ER ORDRE

Maintenant que l'on sait représenter des formules bien formées de la LP1 se pose désormais, comme en logique des propositions, la question de leur interprétation, c'est-à-dire du calcul de leur valeur de vérité. Ici la tâche est compliquée car on ne manipule pas des atomes qui ont pour valeur de vérité *Vrai* ou *Faux*, mais :

- des variables, qui peuvent potentiellement prendre une infinité de valeurs
- des fonctions dont la valeur dépendra de l'interprétation de ses arguments,
- des prédicats, dont la valeur de vérité dépendra de l'interprétation de ses arguments.

Une formule bien formée de la LP1 étant composée en règle générale de formules atomiques composées de prédicats, sa valeur de vérité va donc correspondre de l'interprétation des variables qui la composent. Ces interprétations sont potentiellement en nombre infini. Considérons la fbf ci-dessous :

- $\forall x\ (\text{Entier}(x) \Rightarrow \text{Reel}(x))$

Pour interpréter la formule, c'est-à-dire pour savoir si elle est vraie ou fausse, il va nous falloir étudier la valeur de vérité de l'expression $\text{Entier}(x) \Rightarrow \text{Reel}(x)$ pour toutes valeurs de x imaginables : les nombres entiers, les nombres réels, mais également toute autre interprétation imaginable de x …

Il ne sera donc pas possible d'utiliser ici la méthode des tables de vérités, puisque la table serait infinie. Heureusement, d'autres techniques déjà étudiées en LP vont venir à notre secours. Dans un premier temps, tentons déjà de définir plus précisément la notion d'interprétation en LP1

3.1. INTERPRETATION EN LP1

En logique des prédicats du 1er ordre, la valeur de vérité d'une formule dépend donc de celle de ses variables, fonctions et prédicats. Une interprétation est définie comme le quadruplet I = {$\mathcal{D}$, IV, IF , IP}

Domaine d'interprétation $\mathcal{D}$ – C'est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les termes (variables, constantes, termes fonctionnels) dans le problème considéré. Le domaine d'interprétation permet de limiter l'étude du problème non plus sur tout ce qui peut être imaginable, mais sur un ensemble de données restreint.

Exemple – Dans l'exemple précédent, on peut choisir comme domaine d'interprétation l'ensemble $\mathfrak{R}$ ensemble des nombres réels. On peut également ne pas définir ce domaine et autoriser donc les termes à prendre toute valeur dans n'importe quel ensemble de définition.

Interprétation des variables I_v – Cette interprétation revient à définir une valeur pour l'ensemble des variables d'un problème Formellement, c'est une application I_v qui attribue une valeur à toute variable dans le domaine de définition.

$$I_v : \{variables\} \rightarrow \mathcal{D}$$
$$x \qquad I(x) = Iv(x)$$

Exemple – Il faut bien comprendre que dans une fbf telle que $\forall x\ H(x)$, la variable x peut prendre toutes les valeurs possibles de l'ensemble de définition. Interpréter cette variable revient donc à lui attribuer une valeur. Par exemple, si le domaine d'interprétation est une fois encore l'ensemble des réel : $I_v(x) = 3,1415$.

Interprétation des fonctions I_f – Dans une fbf telle que $\forall x\ P(f(x)$, la fonction f n'est pas définie, elle a priori quelconque. L'interprétation des fonctions revient à choisir une définition précise pour celles-ci. Formellement, l'interprétation d'une fonction f est une application qui attribue un élément de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ à tout n-uplet de valeurs de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ qui correspond à ses arguments instanciés. Cela revient à définir la fonction par l'ensemble de ses valeurs dans l'ensemble de définition.

$$I_f : \quad \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$
$$(t_1,...t_n) \quad I(f(t_1,...t_n)) = f(x) = 4 - x\ I(t_1),...\ I(t_n))$$

Exemple – Supposons que l'on considère l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ = {1, 2, 3} et que l'on considère la fonction quelconque d'arité 1 `f/1`. Une interprétation de `f` peut être par exemple la fonction :

$\mathcal{D}$	$\rightarrow$	$\mathcal{D}$
1		f(1)= 3
2		f(2) = 2
3		f(3)= 1

Une autre interprétation pourrait également être une fonction constante : elle vaut toujours 1.

$\mathcal{D}$	$\rightarrow$	$\mathcal{D}$
1		f(1) = 1
2		f(2) = 1
3		f(3) = 1

Ici, on a défini l'interprétation de la fonction par les valeurs qu'elle prend pour chacune des interprétations de son argument[1]. Au final, sur un domaine d'interprétation à trois éléments tel que $\mathcal{D}$ = {1, 2, 3}, on peut ainsi imaginer 3^3 = 27 interprétations de fonctions possibles. On comprend tout de suite que le nombre d'interprétations de fonctions est infini sur un domaine d'interprétation infini tel que, par exemple, l'ensemble des réels.

On peut également définir directement la fonction par une formule. Dans notre exemple, on peut ainsi définir: $I_f(f)$ comme la fonction $f(x) = 4-x$. On remarque au passage que les différentes valeurs que prend la fonction restent bien entendu dans le domaine d'interprétation **D**. Cela ne change rien au problème, dans la plupart des cas, le nombre d'interprétation possible d'une fonction est potentiellement infini.

Interprétation des prédicats I_P – Dans la fbf $\forall x\ P(f(x)$, le prédicat P est lui aussi totalement quelconque, comme l'était la fonction f. Interpréter le prédicat P revient là encore à lui donner une définition précise. Formellement, l'interprétation d'un prédicat P est une application qui attribue une valeur de vérité (vrai ou faux) à tout n-uplet de valeurs de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ qui correspond à ses arguments instanciés. Cela revient à définir le prédicat par l'ensemble de ses valeurs dans l'ensemble de définition.

$$I_P : \quad \mathcal{D}^n \rightarrow \{vrai, faux\}$$
$$(t_1,...t_n) \quad I(P(t_1,...t_n)) = I_P(P)(I(t_1),...\ I(t_n))$$

Exemple – Reprenons le prédicat `P` de la formule $\forall x\ P(f(x))$: on peut lui définir tous les sens possibles. Si l'on reprend notre exemple avec $\mathcal{D}$ = {1, 2, 3} , on peut par exemple définir le prédicat P/1 comme suit : $I_P(P)$: `P(x) est vrai si x est pair`

Ce qui correspond à la définition suivante

$\mathcal{D}$	$\rightarrow$	{vrai,faux}
1		*Faux* = P(1)
2		*Vrai* = P(2)
3		*Faux* = P(3)

Là encore, nous sommes dans un cas simple où le nombre d'interprétations est limité, puisque le domaine d'interprétation est de cardinalité finie. Le plus souvent, nous aurons à faire à un domaine comportant un nombre d'infini d'éléments … d'où la possibilité de définit une infinité d'interprétation des prédicats.

[1] Un peu à la manière d'une fonction booléenne définie par sa table de vérité (hors programme L1)

A partir de ces définitions, on peut dès lors se demander si la formule que nous avons prise en exemple, à savoir ϕ : $\forall x \ P(f(x))$ est satisfaisable, tautologique ou contradictoire.

Prenons l'interprétation que nous avons étudiée en exemple, avec $\mathcal{D}$ **=** {1, 2, 3}, $I_f(f)$: f(x) = 4-x et $I_p(P)$: P(x) est vrai si x est pair.

On a alors comme interprétation de la formule : $I(\phi)$: $\forall x \ Pair(4-x)$ avec $x \in \{1, 2, 3\}$

On voit que cette interprétation de la formule est fausse, puisque Pair(4-x) n'est pas vrai pour tout x (il est par exemple faux pour l'interprétation $I_v(x) = 3$). Nous avons donc trouvé une interprétation des variables, des fonctions et des prédicats qui rend fausse la formule. La formule n'est donc pas tautologique.

Est-elle satisfaisable ? Pour le prouver, il faut trouver une nouvelle interprétation de la formule (donc de son prédicat et de sa fonction) qui rend vraie cette dernière. Cela est possible. Pour cela, il suffit par exemple de prendre comme domaine d'interprétation l'ensemble des entiers naturels $\mathcal{D} = \aleph$, la fonction identité $I_f(f)$: f(x) = x et le prédicat $I_p(P)$: P(x) est vrai si x est positif (soit $x \geq 0$). L'interprétation de la formule devient alors : $I(\phi)$: $\forall x \ x \geq 0$, avec $x \in \aleph$. Le jugement atomique $x \geq 0$ est vrai sur tout l'ensemble d'interprétation, donc la formule est vraie dans cette interprétation.

Nous avons trouvé une interprétation de la formule qui la rend fausse, et un modèle qui la rend vraie : elle est donc satisfaisable, mais pas tautologique.

3.2. CP1 : VALEUR DE VERITE D'UNE FORMULE ET QUANTIFICATION

Nous venons de voi, sur un exemple très simple – ($\forall x \ P(f(x))$ – que l'interprétation d'une formule est plus complexe en logique des prédicats du 1er ordre qu'en logique des propositions. Toutefois, si l'on considère une formule plus complexe avec des connecteurs logiques, on retrouve le principe de compositionnalité déjà rencontré en logique des propositions :

> **Principe de compositionnalité de la logique des prédicats**
>
> *La logique des prédicats du 1er ordre est compositionnelle. C'est-à-dire que la valeur de vérité d'une formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre ne dépend que :*
>
> - *de la valeur de vérité des atomes qui la compose*
> - *de sa structure, c'est-à-dire de l'articulation de ces atomes avec des connecteurs logiques.*

En pratique, on procède donc comme en logique des propositions, sauf qu'au lieu de partir des atomes (par exemple A, B, $\neg$A etc…) pour commencer le calcul, il faut partir des formules atomiques (par exemple A(x), B(Jean), $\neg$C(x,y…) ou encore P(f(x)), ce qui signifie interpréter les variables, les prédicats et les fonctions qu'elles contiennent. On procède ensuite à la prise en compte classique des connecteurs {$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, …} pour traiter les combinaisons de formules prédicatives.

S'ajoute en plus à cela l'utilisation des deux quantificateurs existentiels et universels. Leur interprétation est assez naturelle :

> *Soit ϕ une formule bien formée quelconque de la logique des prédicats du 1er ordre. Alors*
>
> - *$\forall x \ \phi$ est vraie si et seulement si ϕ est vraie pour toute interprétation $I_v(x)$ dans le domaine d'intepprétation $\mathcal{D}$.*
> - *$\exists x \ \phi$ est vraie si et seulement si ϕ est vraie pour au moins une interprétation $I_v(x)$ dans $\mathcal{D}$.*

Tout ceci étant posé, illustrons sur un exemple comment calculer l'interprétation d'une formule de la LP1. Considérons la formule $\phi = \forall x \exists y \ P(x,y)$ et cherchons à savoir si cette formule est contradictoire, tautologique ou satisfaisable. Cette formule peut avoir de multiples interprétations, nous allons en étudier quelques-unes pour répondre à la question.

Première interprétation – Considérons le domaine d'interprétation $\mathcal{D} = \aleph$ et un prédicat P d'arité 2 pour lequel on va choisir une interprétation que l'on définit comme suit :

$I_p(P)$: P(x,y) est vrai si y > x.

L'interprétation de la formule devient $I(\phi)$: $\forall x \exists y \ y > x$ sur l'ensemble $\aleph$ des entiers naturels.

On remarque que l'ordre des quantificateurs a une importance. Lorsqu'on écrit $\forall x \exists y$, on doit choisir en premier une interprétation de x, puis ne rechercher qu'ensuite l'existence d'un y qui, le plus souvent, va dépendre de la valeur de x déjà choisie. Et répéter cette opération pour tous les x du domaine d'interprétation, puisque x est quantifié universellement ($\forall x$). Ainsi, dans notre exemple, puisqu'on cherche à avoir $y \geq x$, on peut choisir comme interprétation de y l'entier qui est juste supérieur à x, soit x+1. On a donc comme interprétation de chaque y : $I_v(y) = I_v(x) + 1$.

Ce choix nous permet de rendre vraie la formule $y > x$ pour toutes les valeurs de x. Par exemple :

- $x = 0$ alors $y = x+1 = 1$ et on a bien $y > x$ puisque $1 > 0$
- $x = 1$ alors $y = x+1 = 2$ et on a bien $y > x$ puisque $2 > 1$
- $x = 2$ alors $y = x+1 = 3$ et on a bien $y > x$ puisque $3 > 2$
- et ainsi de suite pour toutes les valeurs entières de x

Pour toute valeur de x, il existe bien une valeur de y telle que $y > x$. Donc la formule $\forall x \exists y \ y > x$ est vraie dans cette interprétation. La formule est donc satisfaisable, nous en avons trouvé un modèle.

Remarque importante – Le raisonnement n'aurait pas été le même si l'ordre des quantificateurs avait été inversé : $\exists y \forall x \ y > x$. Dans ce cas, pour rendre vraie la formule, il faudrait trouver en premier une valeur unique de y pour laquelle la formule $y > x$ est vraie, et ce pour n'importe quelle valeur de x. Supposons que la valeur de y qui convienne soit y_o. Alors il aurait fallu vérifier :

- pour $x = 1$ alors $y_o > x$
- pour $x = 2$ alors $y_o > x$
- pour $x = 3$ alors $y_o > x$
- et ainsi de suite pour toutes les valeurs entières de x

On voit aisément que y_o est plus grand que tous les x. Sur l'interprétation choisie dans notre exemple ($\mathcal{D} = \aleph$ et $I_P(P)$: $P(x,y)$ est vrai si $y > x$), il n'est pas possible de trouver un tel y puisque l'ensemble des entiers naturels n'a pas de plus grand élément. L'exercice de cours ci-dessous vous permettra de revenir sur cette question. Le paragraphe suivant reviendra brièvement sur ces questions d'ordre des quantificateurs.

Seconde interprétation – Considérons maintenant le domaine d'interprétation $\mathcal{D} = \aleph$ et l'interprétation du prédicat P suivante : $I_P(P)$: P(x,y) est vrai si y < x. L'interprétation de la formule est ici :

$I(\phi)$: $\forall x \exists y \ (y<x)$ pour tous x et y entiers naturels.

Le quantificateur $\forall x$ est placé avant le quantificateur $\exists y$. Pour que l'interprétation de ϕ soit vraie, la formule $\exists y \ (y<x)$ doit donc être vraie pour toutes les interprétations de x. Considérons l'interprétation de x suivante : $I_v(x) = 0$. Pour cette valeur de x, $\exists y \ (y<x)$ devient donc : $\exists y \ y<0$. Par définition de l'ensemble des entiers naturels, il n'est pas possible de trouver un y strictement inférieur à 0. Il n'existe donc pas d'interprétation de y qui rende vraie la formule prédicative $y < x$ pour x nul. La formule prédicative n'étant pas vraie pour tout x, ϕ est fausse dans cette interprétation.

Nous avons donc trouvé une interprétation qui rend vraie la formule, puis une autre qui la rend fausse. La formule est donc simplement satisfaisable.

Question de cours

Question 3.4. Calcul des prédicats du 1er ordre

On considère la formule bien formée $\phi = \exists y \forall x \ A(x,y)$. Trouvez deux interprétations qui démontrent que la formule est simplement satisfaisable. On a pour cela toute liberté sur le choix du domaine d'interprétation et sur l'interprétation du prédicat A/2

3.2. CP1 : INTERPRETATION ET ORDRE DES QUANTIFICATEURS

Les exemples illustratifs du paragraphe précédent nous ont permis de voir que l'ordre des quantificateurs dans une formule était important pour l'interprétation de cette dernière. Ainsi, quelle que soit la formule ϕ considérée, nous avons vu sur un exemple que $\forall x \exists y \ \phi$ n'était pas équivalente a priori à $\exists y \forall x \ \phi$. Il semble donc utile de relever les cas d'équivalence ou non équivalence concernant l'ordre des quantificateurs d'une formule. Pour toute formule ϕ quelconque, on a ainsi :

(1)	$\forall x \forall y\ \phi \equiv \forall y \forall x\ \phi$	(2)	$\exists x \exists y\ \phi \equiv \exists y \exists x\ \phi$
(3)	$\forall x \exists y\ \phi \neq \exists y\, \forall x\ \phi$	(4)	$\exists x \forall y\ \phi \neq \forall y\, \exists x\ \phi$

La relation d'équivalence (1) se comprend aisément : pour toute valeur de x choisie, l'interprétation de la formule doit être vraie pour toutes les valeurs de y possibles. Imaginons que le domaine d'interprétation soit $\mathcal{D} = \{1,2,3\}$.

- pour $x = 1$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $y = 1$, $y = 2$ et $y = 3$
- pour $x = 2$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $y = 1$, $y = 2$ et $y = 3$
- pour $x = 3$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $y = 1$, $y = 2$ et $y = 3$

Cela signifie que l'on doit donc tester tous les couples de valeurs possibles de x et de y. Ici, le choix du y ne dépend donc plus du choix de x. On peut donc écrire de manière équivalente $\forall y \forall x$, les couples d'interprétation des deux variables à vérifier seront les mêmes :

- pour $y = 1$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$
- pour $y = 2$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$
- pour $y = 3$ alors on doit vérifier que la formule est vraie pour $x = 1$, $x = 2$ et $x = 3$

On a donc bien $\forall x \forall y\ \phi \equiv \forall y \forall x\ \phi$

La seconde équivalence est encore plus triviale : lorsqu'on écrit $\exists x \exists y\ \phi$, on affirme qu'il existe une interprétation x_0 de x et une interprétation y_0 de y telles que la formule ϕ est vraie. Puisque ces deux interprétations existent de concert, que l'on présente celle de x ou celle de y en premier n'a pas d'importance, c'est le couple (x_0, y_0) qui rend vraie la formule. On a donc bien : $\exists x \exists y\ \phi \equiv \exists y \exists x\ \phi$

A l'opposé, nous avons montré dans le paragraphe précédent que l'on n'avait pas équivalence entre $\forall x \exists y\ \phi$ et $\exists y\, \forall x\ \phi$, ceci à partir d'un exemple. L'absence d'équivalence dans (4) est exactement de même nature (simple changement de variable) : on a bien $\exists x \forall y\ \phi \neq \forall y\, \exists x\ \phi$

3.3. QUANTIFICATION ET NEGATION

Enfin, il faut se rappeler que la négation peut également porter sur les quantificateurs existentiels et universels, comme nous l'avons vu dans la partie consacrée à la syntaxe de la logique des prédicats.

Ces négations s'interprètent de manière naturelle à savoir :

- **Négation de *il existe* ($\neg\exists x\ \phi$)** - Cette expression signifie qu'il n'existe pas un x rendant vraie la formule ϕ. Cela veut donc dire que la formule est fausse pour tout x, donc que sa négation $\neg\phi$ est vraie pour tout x. Soit donc que $\forall x\ \neg\phi$ est vraie.
- **Négation de *pour tout* ($\neg\forall x\ \phi$)** - Cette expression signifie que la formule ϕ n'est pas vraie pour tous les x. Si elle n'est pas vraie pour tous, alors elle est fausse au moins pour un x, donc il existe au moins un x pour laquelle sa négation $\neg\phi$ est vraie. On la formule $\exists x\ \neg\phi$ est vraie.

Il vient dès lors immédiatement les formules d'équivalences suivantes :

Formules d'équivalence liant négation et quantification

Soit ϕ une formule bien formée quelconque de la logique des prédicats du 1er ordre. On a

- $\neg\forall x\ \phi \equiv \exists x\ \neg\phi$
- $\neg\exists x\ \phi \equiv \forall x\ \neg\phi$

Ces équivalences vont être utiles pour la mise sous forme clausale des formules bien formées de la logique des prédicats du 1er ordre.

4. MISE SOUS FORME CLAUSALE

Comme nous venons de le constater dans le paragraphe consacré au calcul des prédicats du 1er ordre, l'interprétation des fbf de la LP1 n'est pas évidente. Comme en logique des propositions, la méthode de résolution va pouvoir nous renseigner de manière plus évidente sur la contradiction éventuelle d'une formule. En logique des propositions, cette méthode nécessite de mettre auparavant la formule sous forme clausale. Il en reste de même en logique des prédicats du 1er ordre, à la différence notable qu'ici, forme clausale et forme normale conjonctive ne sont plus identiques du fait de la présence de quantificateurs. La mise sous forme clausale va se faire en quatre étapes :

> **Algorithme de mise sous forme clauses d'une fbf de la LP1**
>
> *Soit une formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre. Cette formule peut être mise sous forme clausale par la succession des opérations suivantes :*
>
> 1. ***Forme normale conjonctive*** – *réécriture de la formule dans le système complet de connecteurs {$\rceil$,$\wedge$, $\vee$} puis sous forme de conjonction de disjonctions de formules atomiques.*
> 2. ***Forme prénexe*** – *Passage en tête de formule de l'ensemble des quantificateurs*
> 3. ***Skolemisation*** – *Mise sous forme de Skolem par remplacement des quantificateurs existentiels*
> 4. ***Forme clausale*** – *Obtention de clauses par élimination des quantificateurs universels*

Nous allons étudier ces différentes étapes successives.

4.1. MISE SOUS FORME NORMALE CONJONCTIVE

Dans le chapitre précédent, nous avions vu la définition d'une forme normale conjonctive en logique des propositions : *une formule est sous forme normale conjonctive si et seulement si elle se présente sous la forme d'une conjonction de disjonctions d'atomes ou de leur négation*. Par exemple, nous avions vu qu'une formule de la LP telle que ci-dessous est sous forme normale conjonctive.

$$\rceil P \wedge (A \vee R)$$

Cette définition s'applique directement à la LP1 (qui, rappelons-le, englobe la logique des propositions), à la différence près que les atomes deviennent des formules atomiques. Il vient donc :

> **Forme normale conjonctive d'une fbf de la LP1**
>
> *On dit qu'une formule est sous forme normale conjonctive (fnc) si et seulement si elle se présente sous la forme d'une conjonction de disjonctions de formules atomiques (i.e. prédicats et leurs arguments) ou de leur négation*

Remarque – La définition d'une forme normale disjonctive (fnd) s'adapte de même à la logique des prédicats du premier ordre.

Exemples – La formule $\forall x\ (\ P(f(x)) \wedge \exists y\ (\ A(x,y) \vee R(y)\ ))$ est mise sous forme normale conjonctive, puisqu'elle est formée de la conjonction de la disjonction $\exists y\ (\ A(x,y) \vee R(y))$ et de $P(f(x))$, qui peut être considéré, comme en LP, comme un cas limite de disjonction : $R(f(x)) \vee$ ***Faux***.. Reste la question de la présence du quantificateurs $\forall x$ à l'extérieur de cette conjonction : elle n'entre pas en ligne de compte dans la définition d'une fnc en LP1, de même que la présence du quantificateur existentiel $\exists y$ à l'intérieur même de la formule ne pose pas de problème. Cette question des quantificateurs fera la différence entre forme normale et forme clausale, étudiée plus loin.

A l'opposé, la formule $\forall x\ (P(f(x)) \wedge \exists y \rceil(A(x,y) \vee P(y)))$ n'est pas sous forme normale, du fait de la présence de la négation à l'extérieur de la disjonction : $\rceil(A(x,y) \vee P(y))$: les négations doivent être collées aux prédicats qui forment les formules atomiques. On retrouve ici le même argument qui nous faisait dire en logique des propositions que $P\wedge(A\vee R)$ est une forme normale conjonctive alors que $P \wedge \rceil(A\vee R)$ ne l'est pas. Dans les deux cas, LP comme LP1, il faut réduire la portée des négations pour les rapprocher des atomes ou formules atomiques.

La mise sous forme normale se réalise de la même manière en logique des prédicats du 1er ordre qu'en logique des propositions, à savoir que l'on utilise les mêmes formules d'équivalence auxquelles se rajoutent les règles d'équivalence entre négation et quantification vues au paragraphe 3.3 (par exemple $\rceil\forall x\ P \equiv \exists x\ \rceil P$) : ces règles sont précisément celles qui vont nous permettre de rapprocher les négations des formules atomiques. En LP1, la mise sous forme normale utilisera donc toutes les formules d'équivalence suivantes :

Formules d'équivalence de mise sous forme normale

Pour permettre la mise sous forme normale d'une formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre, on utilise les règles d'équivalence ci-dessous, pour lesquelles les symboles P, Q ou R peuvent représenter n'importe quelle fbf de la LP1

Passage à $\{\vee, \wedge, \neg\}$	$P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge \neg P)$
Double négation	$P \equiv \neg\neg P$
Idempotence	$P \equiv P \wedge P \equiv P \vee P$
Commutativité	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$ $P \vee Q \equiv Q \vee P$
Associativité	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R) \equiv P \wedge Q \wedge R$ $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R) \equiv P \vee Q \vee R$
Distributivité	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Contradiction	$P \wedge \neg P \equiv$ ***Faux***
Tiers-exclus	$P \vee \neg P \equiv$ ***Vrai***
Absorption	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Loi de De Morgan	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Quantification et négation	$\neg \forall x\ P \equiv \exists x\ \neg P$ $\neg \exists x\ P \equiv \forall x\ \neg P$

Démonstration – Ces règles d'équivalence ont été démontrées, par la méthode de tables de vérité, dans le cadre de logique des propositions. Ces démonstrations restent valables dans le cadre de la logique des prédicats du 1er ordre. On effet, ce qui importe ici, c'est la valeur de vérité des formules P, Q et R présentes dans les formules. Celles-ci ont une valeur ***Vraie*** ou ***Faux*** quelle que soit la logique utilisée. D'où le théorème :

Théorème de normalisation

Toute formule bien formée de la logique des prédicats admet une forme normale conjonctive (respectivement disjonctive) qui lui est logiquement équivalente.

Exemple – On considère la formule $\phi \equiv \forall x\ ((P(x) \wedge \exists y\ A(x,y)) \Rightarrow R(x))$ que nous désirons mettre sous forme normale. On va réaliser cette mise sous forme normale en appliquant les règles d'équivalences dans le même ordre qu'en logique des propositions. On procède ainsi :

$\phi \equiv \forall x\ (\neg(P(x) \wedge \exists y\ A(x,y)) \vee R(x))$	remplacement de $\Rightarrow$ dans le système $\{\neg, \wedge, \vee\}$
$\phi \equiv \forall x\ ((\neg P(x) \vee \neg\exists y\ A(x,y)) \vee R(x))$	loi de De Morgan
$\phi \equiv \forall x\ (\neg P(x) \vee \neg\exists y\ A(x,y) \vee R(x))$	associativité (parenthèses supprimées)
$\phi \equiv \forall x\ (\neg P(x) \vee \forall y\ \neg A(x,y) \vee R(x))$	négation des quantification (ici : $\neg\exists y$)

Cette dernière formule est bien sous forme normale conjonctive. On remarque au passage qu'un quantificateur existentiel est devenu un quantificateur universel lors de cette transformation.

D'autres situations de transformation de quantificateurs peuvent survenir lors de la mise sous forme normale d'une formule. Dans certains cas, il peut même arriver que nous ayons à créer de nouveaux quantificateurs. Considérons par exemple la mise sous forme normale de la formule suivante :

$\phi \equiv \forall x\ (P(x) \Leftrightarrow \exists y\ A(x,y))$

Nous disposons de formules d'équivalence pour assurer le passage du connecteur $\Leftrightarrow$ dans le système {$\rceil$,$\wedge$,$\vee$}. Il s'agit par exemple de : $\Phi \Leftrightarrow \Omega \equiv (\Phi \Rightarrow \Omega) \wedge (\Omega \Rightarrow \Phi)$ que nous allons appliquer ici avec $\Phi \equiv P(x)$ et $\Omega \equiv \exists y\ A(x,y)$. On voit que Ω contient un quantificateur universel, qui va devoir être dupliqué puisque Ω est dupliquée dans la formule de transformation de l'équivalence. On a alors:

$\phi \equiv \forall x\ ((P(x) \Rightarrow \exists y\ A(x,y)) \wedge (\exists y\ A(x,y) \Rightarrow P(x)))$ passage dans le système {$\rceil$,$\wedge$,$\vee$}

Dans cette nouvelle écriture, les occurrences de x sont toutes des occurrences liées à la même quantification universelle extérieure : $\forall x$. Il s'agit donc toujours de la même variable. A l'opposé, la variable y a été scindée en des occurrences qui ne sont plus liées au même quantificateur. Il s'agit désormais de deux variables différentes, l'existence d'un y pour les formules $P(x) \Rightarrow \exists y\ A(x,y)$ et pour la formule $(\exists y\ A(x,y) \Rightarrow P(x))$ n'imposant en rien que l'interprétation de y soit la même dans les deux cas. Pour éviter les confusions, il est donc plus que recommandé de renommer l'une des deux occurrences, ce qui nous donne :

$\phi \equiv \forall x\ ((P(x) \Rightarrow \exists y\ A(x,y)) \wedge (\exists z\ A(x,z) \Rightarrow P(x)))$

On dit que l'on a remis la formule sous forme propre, pour éviter toute confusion de variables. Continuons la mise sous forme normale de la formule, en passant également les implications dans le système de connecteurs {$\rceil$,$\wedge$,$\vee$} avec la règle classique $\Phi \Rightarrow \Omega \equiv \rceil\Phi \vee \Omega$. Il vient :

$\phi \equiv \forall x\ ((\rceil P(x) \vee \exists y\ A(x,y)) \wedge (\rceil\exists z\ A(x,z) \vee P(x)))$ passage dans le système {$\rceil$,$\wedge$,$\vee$}

La formule est presque sous forme normale conjonctive : il ne nous reste qu'à réduire la portée de la négation $\rceil\exists z$ pour que celle-ci porte directement sur une formule atomique, comme l'impose la définition des formes normales. On obtient la forme normale conjonctive suivante :

$\phi \equiv \forall x\ ((\rceil P(x) \vee \exists y\ A(x,y)) \wedge (\forall z\ \rceil A(x,z) \vee P(x)))$ négation et quantification

On observe une fois encore que la quantification existentielle est devenue une quantification universelle : c'est une raison supplémentaire de nous convaincre de l'utilité du renommage auquel nous avons procédé précédemment : les variables y et z ne portent en effet plus la même quantification ! Cela nous montre par ailleurs l'importance du positionnement des quantificateurs dans une formule : lors de la formalisation d'un raisonnement en LP1 ont ne peut impunément placer tous les quantificateurs en tête de formule sans trop y réfléchir, comme on se le permet en mathématiques. L'étape suivante va précisément nous montrer comment réunir proprement tous ces quantificateurs en tête de formule.

4.2. MISE SOUS FORME PRENEXE

La mise sous forme prénexe constitue la seconde étape de passage sous forme clausale d'une formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre. Elle revient à placer en tête de formule l'ensemble des quantificateurs d'une formule. Cette étape n'est pas triviale, on ne peut se permettre de placer les quantificateurs en tête de formule n'importe comment. Au contraire, on doit procéder avec rigueur en utilisant l'une des règles d'équivalence suivantes :

> *Soient Φ et Ω des formules bien formées de la logique des prédicats du 1er ordre intégrant, entre autres, des occurrences de deux variables x et y, telles que :*
>
> - *Φ intègre ou non des occurrences de la variable x et aucune occurrence de la variable y*
> - *Ω intègre ou non des occurrences de la variable y et aucune occurrence de la variable x*
>
> *On a alors les règles d'équivalence suivantes :*
>
> – $\forall x\ \Phi \wedge \forall y\ \Omega \equiv \forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$, *en renommant les occurences de y par x dans $\forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$*
>
> – $\forall x\ \Phi \wedge \Omega \equiv \forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$ – $\forall x\ \Phi \vee \Omega \equiv \forall x\ (\Phi \vee \Omega)$
>
> – $\Omega \wedge \forall x\ \Phi \equiv \forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$ – $\Omega \vee \forall x\ \Phi \equiv \forall x\ (\Phi \vee \Omega)$
>
> – $\Omega \wedge \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Phi \wedge \Omega)$ – $\Omega \vee \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Phi \vee \Omega)$

Exemple – Considérons la formule $\forall x\ (x \geq 0) \wedge \forall y \exists z\ (y > z)$. Cette formule est bien sous forme normale. On peut lui appliquer la première règle d'équivalence ci-dessus en prenant $\Phi \equiv x \geq 0$ et $\Omega \equiv \forall y \exists z\ (y > z)$. Cela permet de réécrire la formule comme suit :

$\forall x\ (x\geq 0) \wedge \forall y \exists z\ (y>z) \quad \equiv \quad \forall x \forall y\ (\ (x\geq 0) \wedge \exists z\ (y > z)\ )$

On peut alors appliquer la dernière formule d'équivalence ci-dessus avec $\Omega \equiv x\geq 0$ et et $\Phi \equiv y>z$:

$\forall x \forall y\ ((x\geq 0) \wedge \exists z\ (y>z)) \equiv \forall x \forall y\ (\exists z\ ((x\geq 0)\wedge(y>z))) \equiv \forall x \forall y \exists z\ ((x\geq 0)\wedge(y>z))$

La formule est alors mise sous forme prenexe.

Démonstration – La démonstration de ces règles d'équivalence repose sur la définition même des quantificateurs. Nous allons ici nous contenter de discuter de la règle : $\forall x\ \Phi \wedge \forall y\ \Omega \equiv \forall x\ (\Phi\wedge B)$ Celle-ci peut en effet peut-être vous sembler étonnante, puisqu'une variable semble disparaitre lors de la mise sous forme prenexe.

Supposons tout d'abord que $\forall x\ \Phi \wedge \forall y\ \Omega$ est vraie. Par définition de la quantification universelle, la formule Φ est vraie pour toute interprétation de la variable x. De même, la formule B est vraie pour toute interprétation de la variable y. Le nom de la variable importe peu, on aurait pu écrire aussi bien $\forall x\ \Phi \wedge \forall x\ \Omega$, cela signifie simplement que Φ et Ω sont vraies toutes les deux pour toute interprétation balayant le domaine d'interprétation. Compte-tenu de la table de vérité de la conjonction, on peut en déduire que $\Phi \wedge \Omega$ est également vraie pour toute interprétation. On peut donc écrire que $\forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$ est vraie.

Supposons maintenant que $\forall x\ \Phi \wedge \forall y\ \Omega$ est fausse. Compte-tenu de la table de vérité de la conjonction, cela signifie qu'au moins une des deux formules $\forall x\ \Phi$ et $\forall y\ \Omega$ est fausse. Supposons que ce soit le cas de $\forall x\ \Phi$. Par définition de la quantification universelle, cela veut dire que Φ n'est pas toujours vraie, donc qu'il existe au moins une interprétation de x telle que Φ est fausse (là encore, le nom de la variable n'a aucune importance). Mais alors, pour cette interprétation, la conjonction $\Phi\wedge\Omega$ est fausse a fortiori, d'après la table de vérité de la conjonction. Donc la conjonction $\Phi\wedge\Omega$ n'est pas vraie pour toute interprétation (on a trouvé au moins un contre-exemple), et la formule $\forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$ est fausse. On arriverait bien sûr à la même conclusion si c'était $\forall y\ \Omega$ qui était fausse.

Les deux formules $\forall x\ \Phi \wedge \forall y\ \Omega$ et $\forall x\ (\Phi \wedge \Omega)$ ont donc toujours la même valeur de vérité : elles sont équivalentes. Les autres règles d'équivalence se démontreraient de la même manière.

Exemple complet – On cherche à mettre sous forme normale et prénexe la formule suivante :

$\phi \equiv \forall z\ \rceil(\ \forall u\ A(z,u) \Rightarrow \forall x \forall y\ A(x,y)\ )$

On commence par mettre la formule sous forme normale :

$\phi \equiv \forall z\ \rceil(\ \rceil\forall u\ A(z,u) \vee \forall x \forall y\ A(x,y)\ )$	remplacement de $\Rightarrow$ dans le système $\{\rceil,\wedge,\vee\}$
$\phi \equiv \forall z\ (\ \forall u\ A(z,u) \wedge \rceil\forall x \forall y\ A(x,y)\ )$	loi de De Morgan sur la première négation
$\phi \equiv \forall z\ (\ \forall u\ A(z,u) \wedge \exists x\ \rceil\forall y\ A(x,y)\ )$	réduction négation-quantification $\rceil\forall x$
$\phi \equiv \forall z\ (\ \forall u\ A(z,u) \wedge \exists x \exists y\ \rceil A(x,y)\ )$	réduction négation-quantification $\rceil\forall y$

On obtient une forme normale conjonctive à partir de laquelle nous allons construire une forme prénexe. On peut par exemple commencer par extraire (i.e. faire passer à gauche) la variable u puis ensuite les variables x et y, comme suit :

$\phi \equiv \forall z \forall u\ (A(z,u) \wedge \exists x \exists y\ \rceil A(x,y)\ )$	règle $\forall u\ \Phi \wedge \Omega \equiv \forall u\ (\Phi\wedge\Omega)$
$\phi \equiv \forall z \forall u \exists x\ (A(z,u) \wedge \exists y\ \rceil A(x,y)\ )$	règle $\Omega \wedge \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Omega\wedge\Phi)$
$\phi \equiv \forall z \forall u \exists x \exists y\ (A(z,u) \wedge \rceil A(x,y)\ )$	règle $\Omega \wedge \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Omega\wedge\Phi)$

On obtient bien une formule sous forme normale et prénexe. Remarquons toutefois qu'à partir de la forme normale conjonctive initiale, nous aurions également pu, par exemple, extraire en premier x et y et ensuite seulement u, suivant les transformations suivantes :

$\phi \equiv \forall z \exists x\ (\forall u\ A(z,u) \wedge \exists y\ \rceil A(x,y)\ )$	règle $\Omega \wedge \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Omega\wedge\Phi)$
$\phi \equiv \forall z \exists x \exists y\ (\forall u\ A(z,u) \wedge \rceil A(x,y)\ )$	règle $\Omega \wedge \exists x\ \Phi \equiv \exists x\ (\Omega\wedge\Phi)$
$\phi \equiv \forall z \exists x \exists y \forall u\ (A(z,u) \wedge \rceil A(x,y)\ )$	règle $\forall u\ \Omega \wedge \Phi \equiv \forall u\ (\Omega\wedge\Phi)$

On a donc une seconde formule prénexe équivalente, et il est également aisé de voir qu'on aurait pu également aboutir à la formule : $\phi \equiv \forall z \exists x \forall u\ \exists y\ (A(z,u) \wedge \rceil A(x,y))$.

Il ne faut toutefois pas en conclure que l'on peut extraire les quantificateurs dans n'importe quel ordre. Dans notre exemple, il est impossible par exemple d'extraire la quantification du y avant celle du x pour en arriver à une formule commençant par $\forall z \exists y \exists x \forall u$. Aucune règle ne peut en effet nous conduire à cette succession de quantificateurs, ce qui est très logique : dans la formule initiale, on voit en effet que le choix de l'interprétation du y est conditionné préalablement par celle du x. Il est normal que cette contrainte se traduise dans la formule prénexe. Nous verrons dans l'étape suivante, consacrée à la skolemisation, l'intérêt de cette remarque. Dans l'immédiat, nous nous contentons de constater que :

Il est toujours possible de mettre une formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre sous forme prénexe. Le plus souvent, la forme prénexe associée à une formule n'est toutefois pas unique. Cependant, chacune des formes prénexes obtenue est équivalente à la formule initiale.

Pour aller plus loin (recherche) – Mise sous forme prénexe et combinatoire de calcul

Notons qu'ici, nous avons limité la question de la mise sous forme prénexe à des formules déjà mises sous forme normale conjonctive, car notre objectif est de parvenir à une forme clausale. On peut toutefois chercher à mettre sous forme clausale une formule quelconque de la logique des prédicats du 1er ordre. Il existe ainsi des formules d'équivalence pour extraire les quantificateurs de formules comportant une implication. Dans le cas de l'équivalence ou du ou-exclusif, la question est plus délicate car nous avons vu précédemment (dans le cas de l'équivalence uniquement) que la transformation de ces connecteurs induit la création de nouvelles variables quantifiées. Il est donc recommandé de commencer par mettre préalablement la formule sous forme normale. Mais, comme nous l'avons déjà dit, il n'existe pas une unique forme prénexe associée à une fbf de la LP1 et selon la stratégie choisie pour l'ordre d'extraction des quantificateurs, les temps de calcul pour réaliser l'opération sont fortement variables. Les chercheurs en informatique travaillent ainsi toujours sur l'optimisation de ces stratégies d'extraction des quantificateurs. Voici deux articles qui résument assez bien l'état d'avancée des recherches dans le domaine. Le premier article vous donnera la réponse à la question de cours précédente, si vous n'êtes pas parvenu à la résoudre de vous-même.

Benoit Da Mota (2009) Équivalences et forme prénexe pour les formules booléennes quantifiées. Actes de la conférence *RJCIA (Rencontres Jeunes Chercheurs en Intelligence Artificielle).*

Egly U., Seidl M., Tompits H. Woltran S., Zolda S., Zolda M. (2003) Comparing different prenexing strategies for quantified boolean formulas. Proceedings of the *6th SAT conference (Theory and Applications of Satisfiability Testing)*, *Lecture Notes in Computer Science* (*LNCS)*, 2919, p. 214–228.

4.3. SKOLEMISATION OU MISE SOUS FORME DE SKOLEM

A l'issue de l'étape de mise sous forme prénexe, tous les quantificateurs de la formule sont donc positionnés en tête de cette dernière. La mise sous forme de Skolem va consister à éliminer les quantificateurs existentiels ($\exists$) pour les remplacer par un terme fonctionnel ou une constante. Pourquoi un tel remplacement ? Comment procéder en pratique ? Nous allons étudier quelques situations type pour présenter cette opération.

Première intuition – Considérons la formule $\forall x \exists y\ Sup(x,y)$ avec l'interprétation suivante du prédicat $Sup/2$: $Sup(x,y) \equiv x < y$. Supposons par ailleurs que le domaine d'interprétation soit celui des entiers naturels. L'interprétation de la formule devient ici : $\forall x \exists y\ x < y$ avec x,y entiers

Les mathématiques nous ont enseigné que cette formule est vraie. Ceci se démontre aisément. Prenons une interprétation $I_v(x)$ quelconque de la variable x. Il est alors possible de construire une interprétation $I_v(y)$ de la variable y pour laquelle $x \geq y$ est vrai. Par exemple, il suffit de prendre $I_v(y) = I_v(x) + 1$. Comme l'ensemble des entiers naturels n'a pas de borne supérieure, il est toujours possible de construire un $I_v(x) + 1$ qui reste dans l'ensemble d'interprétation et $I_v(y)$ vérifie bien la condition $x < y$.. Nous venons donc de montrer que pour tout x, il existe un y tel que $Sup(x,y)$ est vrai. Donc la formule $\forall x \exists y\ Sup(x,y)$ est vraie.

La démonstration que nous venons de faire nous donne une idée supplémentaire qui est à la base de la Skolemisation. Pour faire notre démonstration, nous avons construit la fonction $f : x \rightarrow x+1$ telle que $y = f(x)$. On peut alors dire qu'il existe une fonction f telle que $\forall x\ Sup(x,f(x))$ est vraie.

Là est l'idée de la Skolemisation : supposons que nous ayons une formule $\forall x \exists y\ P(x,y)$ qui soit vraie. Alors, il existe une fonction f interne au domaine d'interprétation telle que $\forall x\ P(x,f(x))$ est également vraie. Cette fonction f est celle qui nous permet de trouver la bonne interprétation de y, qui dépend de x comme sur notre exemple précédent. Notons bien que nous ne cherchons pas une équivalence logique entre les deux formules $\forall x \exists y\ P(x,y)$ et $\forall x\ P(x,f(x))$ mais simplement que si l'une est satisfaisable, l'autre l'est également : il est alors possible de construire une fonction f qui va bien. On dit que les deux formules sont **équisatisfaisables**.

Démonstration sur cas simple : deux quantificateurs – La démonstration de cette équisatisfaisabilité est immédiate sur notre exemple précédent. En effet, nous avons qu'il était possible de construire une fonction $f : x \rightarrow x+1$ pour remplacer y par $f(x)$. Une démonstration rigoureuse avec une formule de forme plus générale du type $\forall x \exists y\ P(x,y)$ est au-delà des objectifs de cet ouvrage.

Généralisation à tout nombre de quantificateurs – Dans le cas précédent, y ne dépendait que d'une variable x. Étudions maintenant la formule prénexe suivante : $\forall x \forall y \exists z\ Entre(x,y,z)$ et prenons l'interprétation suivante du prédicat $Entre/3$: $Entre(x,y,z)$ est vrai si z est compris au sens large entre x et y, soit $x \leq z \leq y$ ou bien $y \leq z \leq x$. On considère par ailleurs que le domaine d'interprétation est celui des nombres réels. L'interprétation de la formule devient alors :

$$\forall x \forall y \exists z\ (x \leq z \leq y) \vee (y \leq z \leq x) \text{ avec x,y,z réels}$$

Là encore, pour montrer que la formule est vraie, il est possible de construire une fonction qui permettre de trouver un z compris entre x et y pour toute interprétation de x et y. Par exemple, on prend z au milieu du segment $[x,y]$. Soit : $I_v(z) = (I_v(x) + I_v(y)/2$. Par exemple :

$I_v(x) = 2$	$I_v(y) = 3$	alors	$I_v(z)= 2,5$
$I_v(x) = 5$	$I_v(y) = 4,2$	alors	$I_v(z)= 4,6$
$I_v(x) = 5$	$I_v(y) = 5$	alors	$I_v(z)= 5$

Quelles que soient les interprétations de x et y choisies, il existe donc une interprétation de z qui rend vrai le prédicat $Entre(x,y,z)$. La construction de l'interprétation de z au milieu du segment $[x,y]$ nous montre que l'on peut définir une fonction qui va dépendre des deux variables quantifiées univerellement x et y, placées avant la quantification existentielle de z : $f(x,y)= (x+y)/2$ nous donne que $\forall x \forall y\ Entre(x,y,f(x,y))$ est vraie. Par un raisonnement identique au précédent, on montre l'équisatisfaisabilité des formules $\forall x \forall y \exists z\ P(x,y,z)$ et $\forall x\ P(x,y,f(x,y))$. La démonstration de cette généralisation suit également la même démarche[2] et peut être étendue à un nombre quelconque de variables universelles précédant la quantification existentielle. Il nous reste à étudier deux cas particuliers avant d'énoncer la règle générale de Skolemisation.

Cas de quantificateurs existentiels et universels mélangés – Considérons cette fois une formule de la forme $\forall x \forall y \exists z \forall t \exists u\ P(x,y,z,t,u)$ où les variables z et t sont quantifiées existentiellement. Le souci est que dans ce cas, la variable u est certes dans la portée de variables universelles, mais également de la variable existentielle z. Cette situation se résout facilement. Appliquons tout d'abord les règles vues précédemment au cas de la variable z. Celle-ci dépend des variables x et y quantifiées universellement. Dès lors, il vient immédiatement :

$\forall x \forall y \exists z \forall t \exists u\ P(x,y,z,t,u)$ est équisatisfaisable avec $\forall x \forall y \forall t \exists u\ P(x,y,f(x,y),t,u)$

La variable u dépend des variables qui sont positionnées avant elles dans la quantification : x, y, z et t. Lors de la Skoelemisation, on devrait la remplacer par une fonction $g(x, y, z, t)$. Mais nous avons vu que z dépend déjà des variables x et y. On a donc $g(x, y, z, t) = g(x, y, f(x,y), t)$. De fait, u ne dépend que des trois variables quantifiées universellement : x, y et t. On introduit donc une fonction $h(x,y,t)$ pour la remplacer qui est la composition $g \circ f$ de g et f. Dès lors, il vient :

$\forall x \forall y \exists z \forall t \exists u\ P(x,y,z,t,u)$ est équisatisfaisable avec $\forall x \forall y \forall t\ P(x,y,f(x,y),t,h(x,y,t))$

2 Cette généralisation se justifie de la manière suivante : ici, z dépend de deux variables quantifiées universellement, puisque le quantificateur existentiel de z est placé dans la portée des quantificateurs de ces variables. Il semble donc justifié que l'on remplace z par une fonction de ces deux variables pour en arriver à une formule la conséquence sémantique de la première. Les esprits attentifs auront sans doute remarqué que dans l'exemple de la formule, il était également possible de construire pour la démonstration une fonction qui ne dépend soit que de la variable x (en prenant $I_v(z) = I_v(x)$), soit de la variable y (en prenant $I_v(z) = I_v(y)$). Il s'agit d'un cas particulier qui peut se trouver le cas échéant, mais n'a aucune portée générale.

On remarque que l'on a remplacé u par un terme fonctionnel qui, bien entendu, ne fait pas appel à la fonction f utilisée pour éliminer le z : on utilise une nouvelle fonction à chaque remplacement. Imaginons par exemple que $f(x,y)=x+y$ et que $g(x,y,z,t)=\sin(x+y+z+t)$ on a alors tout simplement $h(x,y,t)=g\circ f(x,y,t)=\sin(x+y+(x+y)+t)=\sin(2x+2y+t)$.

Au final, on voit donc que les variables quantifiées existentiellement doivent être remplacées, lors de la Skolemisation, par une fonction des variables quantifiées universellement qui sont placées avant elles dans l'expression de la fomule.

Cas d'une quantification existentielle en tête de formule – Considérons enfin la formule $\exists x\ Sup(x,0)$ avec le domaine d'interprétation des entiers naturels et la même interprétation que précédemment pour le prédicat Sup : $Sup(x,y) \equiv x\geq y$. Cette interprétation de la formule est donc : $\exists x\ x>0$. Cette formule est bien entendu vraie. Il suffit par exemple de prendre pour interprétation de x : $I_v(x) = 1$ et la formule prédicative $Sup(x,0)$ est vraie pour cette interprétation. On a donc bien l'existence d'un x tel que le prédicat est vrai, donc $\exists x\ Sup(x,0)$ est vrai. Ceci parce que $Sup(1,0)$ est vrai. Dans ce cas, on peut donc remplacer lors de la Skoelemisation la variable quantifiée existentiellement par une constante et non une fonction pour arriver à construire une formule satisfaisable. On remplace donc la formule $\exists x\ Sup(x,0)$ par $Sup(1,0)$. Là encore, il n'y a pas équivalence entre les deux formules, mais simplement équisatisfaisabilité[3]. Nous verrons que cela suffit amplement à notre problème pour appliquer, par exemple, la résolution.

Cette analyse se généralise aisément. Il est en effet clair que $\exists x\ P(x)$ et $P(C)$ sont équi-satisfaisables : s'il existe une interprétation du prédicat P tel que $\exists x\ P(x)$ est vraie, alors cela veut dire qu'il existe une interprétation $I_v(x)$ de la variable x telle que $P(x)$ est vraie. On peut dès lors rendre $P(C)$ vraie en prenant comme valeur de C l'interprétation $I_v(x)$ précédente.

Ainsi, nous avons étudié séparément tous les cas de figure possibles que l'on peut rencontrer lors d'une mise sous forme de Skolem, suivant l'ordre des connecteurs existentiels et universels que l'on observe dans une forme prénexe. En combinant ces démonstrations, on peut énoncer le théorème :

> **Mise sous forme de Skolem**
> Soit Φ une formule (close) bien formée et mise sous forme nprénexe de la logique des prédicats du 1er ordre. Alors, il est toujours possible de construire une formule Φ_S, dite formule de Skolem associée à la formule Φ, telle que :
>
> - les variables quantifiées existentiellement de la formule Φ sont remplacées par une constante dans le cas où leur quantificateur n'est dans la portée d'aucune quantification universelle.
> - les variables quantifiées existentiellement de la formule Φ sont remplacées par des termes fonctionnels de la forme f(x,y,…) où x, y … sont des variables quantifiées universellement telle que la portée de leur quantification englobe la quantification existentielle de la variable remplacée,
>
> On a alors : Φ et Φ_S sont équisatisfaisables, c'est-à-dire en particulier que :
>
> - que si l'une des formules est satisfaisable, l'autre l'est également (et réciproquement)
> - que si l'une des formules est contradictoire, l'autre l'est également (et réciproquement)

Démonstration – Nous avons déjà démontré, par l'étude des cas précédents, que si Φ était satisfaisable, Φ_s l'était aussi. Démontrons maintenant que la réciproque selon laquelle si Φ_S est satisfaisable, Φ est également vraie. Considérons ainsi toutes les situations étudiées précédemment :

- **cas simple** : $\Phi \equiv \forall x \exists y\ P(x,y)$. Alors $\Phi_s \equiv \forall x\ P(x,f(x))$. Si Φ_s est satisfaisable, cela signifie qu'il existe une interprétation de P et de f telle que la formule est vraie, donc telle que $P(x,f(x))$ est vraie pour tout x. On voit dès lors que pour tout x, il est toujours possible de trouver un y tel que

[3] On parle bien ici de formules équisatisfaisables et non pas équivalentes. Prenons un exemple. La forme de Skolem de $F \equiv \exists x\ P(x)$ est $G \equiv P(C)$. On a $\neg F \equiv \forall x\ \neg P(x)$ et $\neg G \equiv \neg P(C)$. Si $P(x)$ est interprété par *x est pair* dans le domaine des entiers, $\neg F$ est fausse et $\neg G$ est satisfaisable. Donc, la négation transforme deux formules équi-satisfaisables, en deux formules qui ne le sont pas nécessairement. Et il n'y a donc bien pas équivalence entre les formules.

$P(x,y)$ est vrai : il suffit de prendre pour interprétation de y la valeur $f(x)$. Donc $\forall x \exists y\ P(x,y)$ est vraie pour cette interprétation de P. Φ est donc satisfaisable.

- **généralisation** : $\Phi \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_n\ \exists y\ P(x,y)$. La démonstration ci-dessus se généralise sans souci.
- **cas particulier** : $\Phi \equiv \exists x\ P(x)$. Dans ce cas, la forme de Skolem est donnée par $\Phi_s \equiv P(C)$. Si Φ_s est satisfaisable, cela veut donc dire qu'il existe une interprétation de P et une constante C telle que $P(C)$ est vraie. Mais alors, il existe donc bien un x tel que $P(x)$ est vrai. $\Phi \equiv \exists x\ P(x)$ est donc vraie pour cette interprétation de P : la formule est donc satisfaisable.
- cas général : le cas général est un mélange des situations décrites ci-dessus. On peut donc le démontrer en combinant les cas précédemment évoqués.

Au final, la réciproque est vraie. En corollaire, il vient par l'absurde que si une formule (Φ ou Φ_S) est contradictoire, l'autre l'est également. Supposons par exemple que Φ est contradictoire. Si l'on suppose que Φ_S est satisfaisable, le théorème que nous venons de démontrer nous dit que Φ est alors satisfaisable, ce qui est absurde. Φ_S est donc contradictoire. Nous arriverions au même résultat en partant de Φ_S.

Exemple – A titre d'illustration de la mise sous forme de Skolem, reprenons notre exemple initial :

$\phi \equiv \forall z\ \neg(\ \forall u\ A(z,u) \Rightarrow \forall x \forall y\ A(x,y)\ )$

Nous avons vu que cette formule pouvait être mise sous différentes formes prénexes équivalentes, parmi lesquelles :

(1) $\phi_1 \equiv \forall z \exists x \exists y \forall u\ (A(z,u) \wedge \neg A(x,y)\ )$

(2) $\phi_2 \equiv \forall z \forall u \exists x \exists y\ (A(z,u) \wedge \neg A(x,y)\ )$

Immédiatement, il vient que nous pouvons trouver au moins deux formes de Skolem à la formule :

(1) $\phi_{s1} \equiv \forall z \forall u\ (A(z,u) \wedge \neg A(f(z),g(z))\ )$ x et y dépendent de z,

(2) $\phi_{s2} \equiv \forall z \forall u\ (A(z,u) \wedge \neg A(h(z,u),i(z,u))\ )$ x et y dépendent de z et u

On remarque ainsi qu'une formule n'a pas une forme de Skolem unique.

Il est important de rappeler, pour finir, que la forme de Skolem n'est pas équivalente, mais uniquement équisatisfaisable avec la formule initiale. Dans l'objectif de la résolution qui est le nôtre, ceci n'est toutefois pas gênant : on se rappelle en effet que la résolution vise à montrer la contradiction d'une formule. Or, le théorème d'équisatisfaisabilité de Skolem nous assure que Φ et Φ_S ne peuvent être contradictoires indépendamment l'une de l'autre. Si l'on montre que la forme de Skolem Φ_S est contradictoire par résolution, on aura ainsi montré que la formule initiale Φ l'était également. C'est donc avec la forme de Skolem que nous allons poursuivre la mise sous forme clausale.

Pour aller plus loin – Thoralf Albert Skolem (1887-1963)

Thoralf Albert Skolem (1887-1963) est un mathématicien et logicien norvégien qui n'a pas suivi une carrière académique classique : après avoir commencé à travailler comme assistant de recherche en physique (ses premières publications relèvent d'ailleurs de ce domaine), il s'est tourné vers des recherches en logique mathématique et en algèbre. Il n'a soutenu que tardivement (1926), ne voyant pas immédiatement l'intérêt de la chose pour faire carrière en Norvège, puis il travaille pendant 10 ans comme chercheur à Bergen, dans une ville où il n'existe alors aucune université et bibliothèque de recherche. S'il atteint une position académique reconnue dans son pays (il a ainsi été président de la société norvégienne de mathématiques), il a surtout publié dans des revues norvégiennes de faible audience internationale. Ses travaux ont ainsi souvent été ignorés et redécouverts indépendamment par d'autres chercheurs. Les travaux que menaient Skolem au début des années 20 auraient pu montrer, comme corollaire, la complétude de la logique des prédicats du 1er ordre. Skolem n'a toutefois pas été attentif aux conséquences de cette question, et c'est Kurt Gödel qui prouvera cette complétude en 1930.

Thoralf A. Skolem (1973) Sur la logique mathématique, In. Jean Largeault (Ed.) *Logique mathématique. Textes*, Paris, Armand Collin, coll. Épistémologie, p. 91-108.

4.4. MISE SOUS FORME CLAUSALE

Après Skolemisation, la formule Φ_S ne comporte plus que des quantifications universelles. Elles jouent donc toutes le même rôle, et on peut donc omettre ces quantificateurs pour une écriture implicite qui ne doit toutefois pas nous faire oublier que nous travaillons en fait avec une formule intégralement quantifiée universellement. Cette disparition des quantificateurs nous conduit directement à la forme clausale associée à la formule initiale :

> **Mise sous forme clausale : clauses et littéraux**
> *Soit Φ une formule (close) bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre mise sous forme prénexe et normale conjonctive. Soit Φ_s une forme de Skolem obtenue à partir de cette fnc. Alors, la forme clausale de la formule Φ correspond à la forme de Skolem à laquelle on aura omis les quantificateurs universels : les quantifications universelles des variables sont implicites. Cette forme clausale est constituée d'une conjonction de clauses, suivant la définition suivante : on appelle* ***clause*** *de la logique des prédicats du 1er ordre toute disjonction de* ***littéraux****, c'est-à-dire de formules atomiques ou de leur négation.*

On retrouve bien ici la définition des clauses vue en logique des propositions, mais étendue à la logique des prédicats : la notion d'atome est simplement remplacée ici par celle de formule atomique construites avec des prédicats.

L'algorithme de mise sous forme clausale en quatre étapes que nous venons de décrire nous assure bien que toute formule bien formée de la logique des prédicats du 1er ordre peut se mettre sous la forme d'une conjonction de clauses. Si nous reprenons notre exemple illustratif

$\phi \equiv \forall z \neg(\forall u\ A(z,u) \Rightarrow \forall x \forall y\ A(x,y))$

Nous avons vu que nous pouvions par exemple construire la forme de Skolem suivante :

$\phi_{s1} \equiv \forall z \forall u\ (A(z,u) \wedge \neg A(f(z),g(z)))$

Elle conduit à la forme clausale $(A(z,u) \wedge \neg A(f(z),g(z)))$ qui est donc composée de la conjonction de deux clauses : $A(z,u)$ d'une part et $\neg A(f(z),g(z))$ d'autre part.

Ces deux clauses sont constituées chacune d'un seul littéral. Il s'agit d'un cas limite comme ceux déjà étudiés en LP où l'atome isolé $\neg A$ constituait par exemple lui aussi un cas limite de clause. Une disjonction de littéraux telle que par exemple $A(z,u) \vee B(z) \vee \neg C(u,z)$ constitue bien entendu une clause, $A \vee B \vee \neg C$ de même que constituait une clause en LP.

C'est cet ensemble de clauses issu de la mise sous forme clausale d'une formule qui va être utilisé pour la résolution, en se rappelant qu'il n'existe pas une unique forme clausale, mais que toutes les formes clausales que l'on peut construire à partir d'une formule conduiraient à la même conclusion de contradiction (ou pas), et ce même si elles ne sont pas équivalentes entre elles à la base.

Question de cours

Question 3.5. Mise sous forme clausale

Considérez les formules logiques ci-dessous et dites à chaque fois si elles sont sous forme normale conjonctive, prénexe, et/ou clausale … ou rien de toutes ces formes particulières.

1. $A(x) \wedge B(x,y)$
2. $\forall x\ (A(x) \wedge \exists y\ B(x,y))$
3. $\exists x \forall y\ (A(x) \wedge B(x,y))$
4. $(\neg P(x) \vee Q(x,f(x)) \wedge S(x,y,g(x,y))$
5. $\exists x\ (\ (P(x) \vee \forall y\ Q(y)) \wedge (R \vee \forall x\ S(x))\ )$
6. $(\neg P(x) \wedge Q(x,y)\ ) \vee (\ R(x,f(x)) \wedge S(y)\ )$
7. $\forall y\ \exists x \forall z\ (\ (\neg P(x) \vee Q(y)) \wedge S(z)\ )$

5. SEMANTIQUE DE LA DEDUCTION EN LP1 : RESOLUTION

En logique des prédicats du premier ordre, la question de la validité d'un raisonnement ne peut plus être résolue par la méthode des tables de vérité, puisque la notion d'interprétation est dans ce cas bien plus complexe. La méthode de résolution, qui s'appuie par ailleurs sur le théorème de déduction par réfutation, reste par contre utilisable, moyennant une adaptation repsant sur l'opération d'unification, dont le rôle est très général en informatique.

5.1. THEOREME DE REFUTATION

Le théorème de réfutation, tel que nous l'avons étudié dans le cadre de la logique des propositions, reste valable en logique des prédicats du 1er ordre, à savoir :

> **Théorème de la déduction par réfutation**
>
> *Soit un raisonnement de prémisses $P1,\ P2,\ \dots,\ Pn$ et de conclusion C. Ce raisonnement est valide si et seulement si la formule de réfutation $\mathcal{F}_r \equiv P1 \wedge P2 \wedge \dots Pn \wedge \neg C$, formée de la conjonction des prémisses et de la négation de la conclusion, est contradictoire.*

Démonstration – La démonstration que nous avons donnée dans la partie consacrée à la logique des propositions portait sur la valeur de vérités des formules $P1,\ P2,\ \dots,\ Pn$ et C, et ce, sans nous préoccuper de savoir si celles-ci étaient issues de la logique des propositions ou des prédicats. La démonstration reste donc valable dans le cadre de la LP1.

5.2. ADAPTATION DE LA RESOLUTION A LA LP1 : UNIFICATION

Pour la même raison que ci-dessus, la règle de résolution vue en logique des propositions reste valable en logique des prédicats. Par exemple, partant des clauses $A(x,y) \vee B(y)$ et $\neg A(x,y) \vee C(y)$, on peut déduire la résolvante suivante : $B(y) \vee C(y)$ comme le montre le schéma suivant :

$$A(x,y) \vee B(y) \qquad\qquad \neg A(x,y) \vee C(y)$$

$$B(y) \vee C(y)$$

Toutefois, que se passe-t-il lorsqu'on se trouve en présence de la clause $A(x,f(y)) \vee B(y)$ et de la clause $\neg A(g(t),z) \vee C(z)$. Peut-on identifier les formules atomiques $A(x,f(y))$ et $\neg A(g(t),z)$ pour appliquer la résolution ? La réponse à la question n'est pas triviale, car elle suppose de remplacer dans les clauses le terme x par le terme $g(t)$ et le terme z par le terme $f(y)$. On dit que l'on substitue les variables concernées, pour arriver à une formule atomique identique dans les deux clauses, à savoir : $A(g(t),f(y))$. On dit que l'on a fait l'unification des deux formules $A(x,f(y))$ et $\neg A(g(t),z)$ pour obtenir $A(g(t),f(y))$.On définit :

> **Substitution**
>
> *On appelle substitution σ toute application de l'ensemble des variables $\mathcal{V}$ sur l'ensemble des termes $\mathcal{T}$ telle que :*
>
> $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}$
>
> $x \quad \sigma(x) = y$ *où y est une variable quelconque* — *on note* $[x \leftarrow y]$
>
> $\sigma(x) = K$ *où K est une constante quelconque* — *on note* $[x \leftarrow K]$
>
> $\sigma(x) = f(z)$ *où $f(z)$ est un terme fonctionnel* — *on note* $[x \leftarrow f(z)]$

Remarque – Notons que dans le dernier cas $[x \leftarrow f(z)]$, le terme fonctionnel introduit bien une nouvelle variable z. On n'a pas le droit de substituer une variable par une fonction de cette même variable : les substitutions $[x \leftarrow f(x)]$ ou $[x \leftarrow f(x,y)]$ sont par exemple proscrites.

Cette définition nous dit que l'on peut remplacer une variable soit par une autre variable, soit par une constante ou encore par un terme fonctionnel. Cela semble légitime, en particulier dans le cadre de la résolution où nous travaillons sur des clauses qui sont donc quantifiées universellement. On a ainsi :

- $\forall x\, A(x)$ et $\forall y\, A(y)$ sont équivalentes. La substitution de x par y, que l'on notera $[x \leftarrow y]$, revient à un simple renommage de variable.

- Si on a $\forall x\, A(x)$ qui est vraie, alors A(x) est vraie pour tout x. Donc a fortiori pour une constante K. On peut donc appliquer la substitution $[x \leftarrow K]$, la formule A(K) sera également vraie.
- Enfin, si on a $\forall x\, A(x)$ qui est vraie, alors A(x) est vraie pour tout x du domaine d'interprétation. Donc a fortiori pour tout terme fonctionnel du type f(z), puisque par définition, une fonction a son domaine de variation inclus dans le domaine d'interprétation. On peut donc appliquer la substitution $[x \leftarrow f(z)]$, la formule $\forall z\, A(f(z))$ sera également vraie.

Ainsi si formule est vraie, la formule obtenue après une substitution l'est également. Il vient donc :

Théorème de substitution

Soient Φ une formules bien formée~~s~~ de la logique des prédicats du 1^er^ ordre, et une substitution σ que l'on désire appliquer à cette formule. On a : la formule substituée $\sigma(\Phi)$ est une conséquence sémantique de Φ.

Par contre, on ne peut pas substituer une constante ou un terme fonctionnel. En effet

- Si on a par exemple A(K), ce n'est pas parce que la formule atomique A(K) est vraie pour la constante K qu'elle est vraie pour toute valeur prise dans le domaine d'interprétation de la formule. On ne peut donc être assuré que $\forall x\, A(x)$ est vraie. La substitution $[K \leftarrow x]$ n'est donc pas adaptée.
- De même, si on a par exemple $\forall x\, A(f(x))$ qui est vraie, ce n'est pas pour cela que la formule atomique A(y) sera vraie pour toute valeur de y. Un exemple suffira à s'en persuader. Supposons que notre domaine d'interprétation soit l'ensemble des réels, et que la fonction f soit la fonction sinus. Le domaine de variation de la fonction sinus est [-1,1]. Si on a $\forall x\, A(\sin(x))$, cela ne veut pas dire que l'on a $\forall y\, A(y)$. En effet, puisque sin(x) varie entre -1 et 1, le fait que A(sin(x)) est vraie pour tout x réel ne nous garantit pas que $\forall y\, A(y)$ est vraie. Pour l'interprétation $I_v(y) = 2$, A2(y) est ainsi peut-être fausse. La substitution de la fonction $[f(x) \leftarrow y]$ n'est donc pas adaptée.

Dès lors, la règle de substitution nous dit quelles sont les transformations légitimes sur les variables que l'on peut apporter à deux formules pour les rendre identiques. Si cela est possible, on dit que les formules sont unifiables.

Unification

Soient Φ et Ω deux formules bien formées de la logique des prédicats du 1^er^ ordre. On dit que Φ et Ω sont unifiables s'il existe une substitution σ, appelée unificateur de Φ et Ω telle que $\sigma(\Phi) \equiv \sigma(\Omega)$.

Exemples

- P(A,x,f(g(y))) et P(z,f(z),f(v)) sont unifiables à l'aide de l'unificateur : σ: $[z \leftarrow A,\ x \leftarrow f(z),\ v \leftarrow g(y)]$. On a alors : σ (P(A,x,f(g(y)))) $\equiv$ σ (P(z,f(z),f(v))) $\equiv$ P(A,f(z),f(g(y)))). Remarquons que l'on remplace les variables par des constantes ou des termes fonctionnels, et non l'inverse.
- P(A,x) et P(B,y) ne sont pas unifiables: on ne peut remplacer un constante par une autre constante.
- P(A, x) et P(y, z) sont au contraire unifiables. Il est en effet possible de trouver un unificateur tel que par exemple : σ: $[y \leftarrow A,\ z \leftarrow x]$. On a alors : σ(P(A,x)) $\equiv$ σ(P(y,z)) $\equiv$ P(A,x). Les unificateurs ne sont pas nécessairement uniques. On aurait ainsi pu également utiliser σ_1: $[y \leftarrow A,\ x \leftarrow z]$, ce qui nous aurait donné : σ_1 (P(A,x)) $\equiv$ σ_1 (P(y,z)) $\equiv$ P(A,z) ou même σ_2 : $[y \leftarrow A,\ x \leftarrow A,\ z \leftarrow A]$, ce qui nous aurait donné : σ_2 (P(A,x)) $\equiv$ σ_2 (P(y,z)) $\equiv$ P(A,A). On peut observer au passage que σ_2 s'obtient en composant σ_1 par la substitution σ_3: $[z \leftarrow A]$: $\sigma_2 = \sigma_3 \circ \sigma_1$
- P(A,f(x)) et P(h(z),g(y)) ne sont pas unifiables: on ne peut remplacer un fonction – ici f(x) – par une autre fonction – ici g(y) – puisque rien ne dit que leur domaine de variation sont identiques. De même, on ne peut pas remplacer une fonction – ici, h(z) – par une constante (et réciproquement).

- P(y,y) et P(x,f(x)) ne sont pas unifiables : en effet la substitution σ: [y←x]. conduit à P(x,x) et P(x,f(x)) et on ne peut pas unifier x et f(x). Pour s'en persuader, il suffit de penser à une interprétation où f serait définie par f(x)=x+1.

Question de cours

Question 3.6. Unification

Exercice de cours : unification

Dire si les formules ci-dessous sont unifiables. Si oui, donnez-leur unificateur.

a)	G(x, f (A, y))	G(x, f(A, g(z)))
b)	P(u, g(f(a, b)), u)	P(f(x, g(z)), x, f(y, g(b)))
c)	G(f(x),y)	G(g(x), A)
d)	G(x)	G(f(x))

5.3. RESOLUTION DE ROBINSON

Les principes de la résolution vus en logique des propositions restent valables en logique des prédicats : partant des clauses issues de la formule de réfutation de la formule, on va essayer d'aboutir à la clause vide par application de la règle de résolution.

En logique des prédicats, la règle de résolution est définie comme suit :

> **Règle de résolution**
>
> *Soient Ci et Cj deux clauses appartement à la forme clausale d'une formule Φ , c'est-à-dire que Φ est de la forme $\Phi \equiv C1 \wedge \ldots \wedge Ci \wedge \ldots \wedge Cj \wedge \ldots \wedge Cn$. C1 et C2 forment une paire résolvable si elles possèdent une paire de formules atomiques $A(t1,\ldots,tn)$ et $\neg A(u1,\ldots,un)$ telles que $A(t1,\ldots,tn)$ et $A(u1,\ldots,un)$ peuvent être unifiées. On appelle alors résolvante de C1 et C2 la clause obtenue en mettant en disjonction Ci et Cj privées des formules atomique A et $\neg A$ respectivement, après application de l'unificateur utilisé. La résolvante, notée $res(C1,C2)$ est une conséquence sémantique de Φ.*

Exemple – Considérons les clauses C1 $\equiv P(x) \vee Q(g(x))$ et $C2 \equiv \neg P(f(y))$.

$P(x)$ et $\neg P(f(y)$ sont unifiables avec l'unificateur σ: [x←f(y)]. C1 et C2 forment donc une paire résolvante, mais on peut en tirer la résolvante $res(C1,C2) \equiv Q(g(f(y)))$. On remarque que l'on a bien éliminé les formules atomiques opposées $P(x)$ et $\neg P(f(y)$ mais également que l'unificateur [x←f(y)] a été appliqué à l'élément de clause substituant $Q(g(x))$: c'est naturel, puisque c'est cet unificateur qui permet d'identifier les deux formules atomiques opposées.

Démonstration – La démonstration de la règle de résolution vue en logique des propositions s'applique également ici. Nous avons en effet travaillé sur la valeur de vérité des formules atomiques (les atomes, en logique des propositions) qui constituent les clauses pour la démontrer, sans se préoccuper de la forme de ces éléments. La démonstration s'applique donc encore à la logique des prédicats.

Pour aller plus loin – Règle de Robinson … ou de Herbrand ?

Jacques Herbrand, né à Paris le 12 février 1908, est extraordinairement précoce : classé premier au concours général de mathématiques, il entre à 17 ans à l'ENS et sa thèse, soutenue en 1929, contient un résultat très important qui renvoie la preuve de la véracité de certaines formules logiques à un procédé mécanique. Ce résultat, qui permettait d'automatiser la question de la contradiction de la formule de réfutation associée à un raisonnement logique passe malheureusement inaperçu. Après son service militaire (1929-1931), Herbrand voyage pendant quelques mois en Europe où il travaille auprès des savants les plus renommés. A son retour, il prend quelques jours de vacances au cours desquels il trouve la mort dans un accident de montagne en Isère, le 27 juillet 1931.

Les travaux de Jacques Herbrand seront repris de manière totalement indépendante près de trente ans plus tard par **John Alan Robinson**, qui naît à Halifax dans le Yorkshire en Angleterre le 9 mars 1930 (après la publication de la thèse de Herbrand, donc). Il s'établit aux Etats-Unis en 1952 et il y obtient un doctorat en philosophie en 1956. Il travaille ensuite chez Du Pont de Nemours où il apprend la programmation et les mathématiques. En 1961, il entre à la Rice Université et en 1967, il devient professeur à l'Université de Syracuse en Sicile. C'est à Argonne, où il travaillait l'été en tant que chercheur invité entre 1961 et 1967, que Robinson a conçu le principe de résolution, utilisé, entre autres, dans le fonctionnement du langage de programmation Prolog. Il meurt à Portland aux Etats-Unis le 5 août 2016.

La seule différence concerne le passage d'atome identiques (le `A de A` et de $\neg$`A)` en logique des propositions, à des paires de formules atomiques `A(t1,…,tn)` et `A(u1,…,un)` unifiables en logique des prédicats. Identité et unifiabilité ne sont pas bien entendu pas la même chose, mais nous avons vu dans le paragraphe précédent que la substituée d'une formule est la conséquence sémantique de cette formule. Lorsqu'on applique la résolution sur deux clauses `C1` et `C2`, on obtient donc deux conséquences sémantiques σ(C1) et σ(C2) issues de l'unification, pour en tirer une résolvante `res(C1,C2)` qui est une conséquence sémantique de ces substituées (par reprise du théorème de résolution en logique des propositions). Donc, par transitivité, la résolvante res(C1,C2) est bien une conséquence sémantique des clauses `C1` et `C2` initiales. Dès lors, l'algorithme de résolution vu en logique des propositions s'applique encore en logique des prédicats en restant inchangé :

Principe de résolution

Pour montrer qu'une formule Φ est contradictoire, il suffit de mettre sous forme clausale cette fbf, puis d'appliquer la règle de résolution sur ses clauses tant que nécessaire, jusqu'à la clause vide.

Algorithme de démonstration de la contradiction d'une formule par le principe de résolution

➊ *Mettre cette formule sous forme clausale*

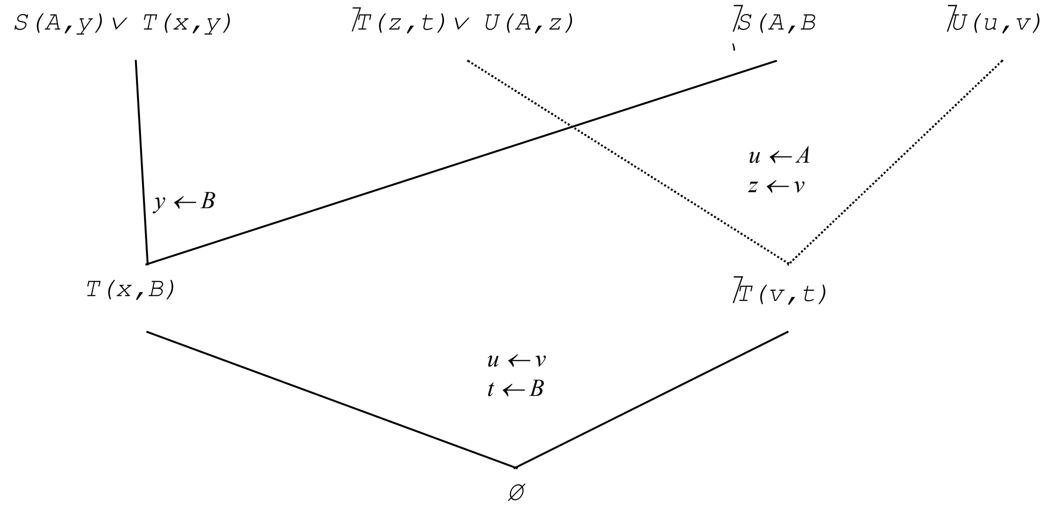
➋ *Tant que l'on n'obtient pas la clause vide, appliquer la résolution sur deux clauses (qu'elles soient des clauses initiales ou qu'elles soient des clauses résolvantes obtenues précédemment) et rajouter la nouvelle clause obtenue dans l'ensemble des clauses.*

➌ *Si la formule est contradictoire, on arrive à la clause vide au bout d'un temps fini. Si ce n'est pas le cas, soit on ne peut plus produire de nouvelle clause résolvante, soit on en produit indéfiniment sans arriver à la cause vide.*

Exemple – Supposons que nous ayons une formule dont la mise sous forme clausale donne :

$$\phi \equiv \forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v\ [(S(A,y) \vee T(x,y)) \wedge (\neg T(z,t) \vee U(A,z)) \wedge \neg S(A,B) \wedge \neg U(u,v)]$$

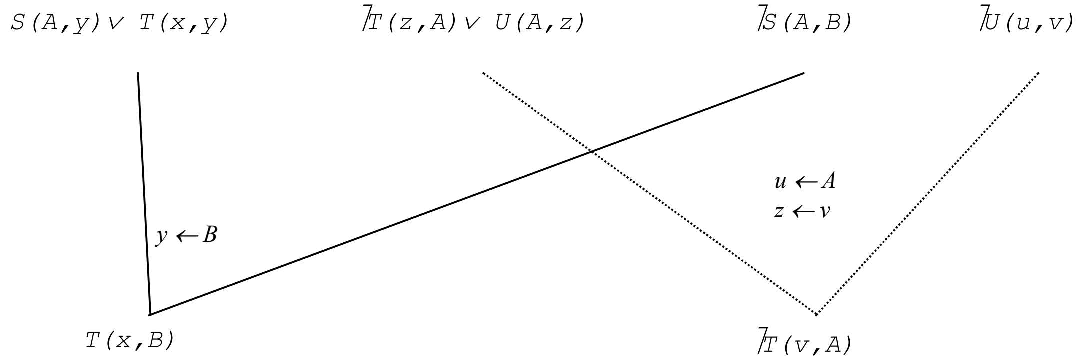
Cette formule donne lieu à 4 clauses à partir de laquelle va pouvoir être menée la résolution, que nous donnons graphiquement ci-dessous. On arrive à la clause vide, la formule est donc contradictoire.



On remarque que l'on a fait figurer les unificateurs sur le schéma de résolution. C'est essentiel, puisque chaque unification modifie sensiblement les formules atomiques, en remplaçant par exemple dans ce cas les variables par des constantes. Il est donc important de reporter les modifications dues à l'unification. Imaginons pas exemple que la formule initiale ait été :

$\phi \equiv \forall x \forall y \forall z \forall t \forall u \forall v\ [(S(A,y) \vee T(x,y)) \wedge (\neg T(z,A) \vee U(A,z)) \wedge \neg S(A,B) \wedge \neg U(u,v)]$

On aurait alors eu l'arbre de résolution suivant :



L'application des unificateurs sur les résolvantes nous montre que l'on arrive cette fois à deux clauses qui ne sont pas unifiables : T(x,B) et T(v,A) car on ne peut substituer la constante A par la constante B. La formule n'est donc pas contradictoire.

Question de cours

Question 3.7. Résolution

En appliquant la méthode de résolution, dire si les ensembles de clauses suivants sont ou non contradictoires

1. $Q(A)$ $\quad \neg P(x,f(x))$ $\quad \neg P(z,t) \vee Q(z)$
2. $A(A)$ $\quad N(B)$ $\quad \neg A(x) \vee \neg N(x)$

5.4. MISE EN GARDE : RESOLUTION ET MISE SOUS FORME DE SKOLEM

Remarque importante, il faut bien prendre garde, lorsque l'on fait la résolution, de réfuter la conclusion avant de procéder à la mise sous forme clausale, et en particulier, sous forme de Skolem, de la formule de réfutation. Nous avons vu en effet dans le paragraphe sur la mise sous forme de Skolem (cf. § 4.3) que si une formule Φ et sa forme de Skolem Φ_S sont équisatisfaisables, leurs négations $\neg\Phi$ et $\neg\Phi_S$ ne sont pas nécessairement équivalentes. L'ordre d'application de la négation (en premier) et de la mise sous forme de Skolem (ensuite seulement) est donc essentiel. L'exemple qui suit permet d'illustrer cette mise en garde.

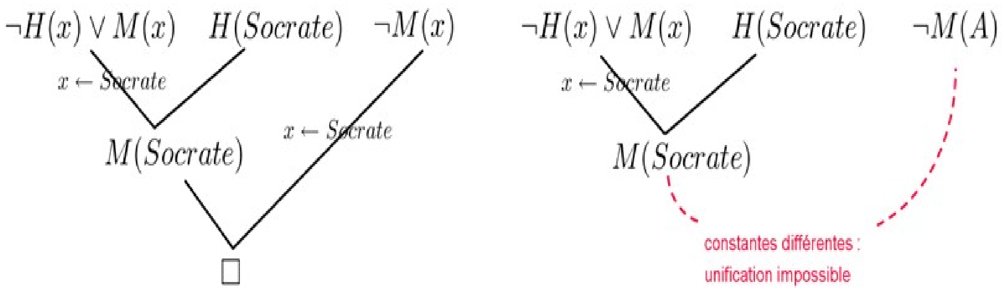
Examinons le raisonnement suivant :

Tous les hommes sont mortels
Socrate est un homme
____
Donc il existe des mortels

La conclusion s'écrit : $\exists x\ M(x)$ avec $M(x)$ est vrai si x est mortel. La réfutation de la conclusion donne $\neg(\exists x\ M(x)) \equiv \forall x\ \neg M(x)$ dont la forme de Skolem est simplement $\neg M(x)$

Si l'on calcule au contrait en premier la forme de Skolem de la conclusion $\exists x\ M(x)$, on obtient simplement $M(A)$ où A est une constante donnée non encore utilisée (donc différente de *Socrate*). La négation, ensuite, de cette forme est au final $\neg M(A)$ et non pas $\neg M(x)$ comme obtenu précédemment.

On aboutit donc à deux résolutions différentes qui figurent dans le schéma suivant.



A gauche, on obtient une contradiction après deux applications de la règle de résolution, ce qui permet de montrer la validité du raisonnement.

A droite, la deuxième application de la règle de résolution est impossible car on ne peut unifier deux constantes distinctes. On aboutit à la conclusion, bien sûr erronée, suivant laquelle, comme on a épuisé les déductions possibles, le raisonnement n'est pas valide.

5.5. SEMANTIQUE DE LA DEDUCTION : RE-INTERPRETATION DE L'UNIFICATION

L'utilité de l'unification va toutefois bien au-delà de la nécessité d'arriver à la clause vide pour montrer la contradiction d'une formule. Dans le cas d'une application de la résolution à un raisonnement, l'unificateur que l'on va construire représente en effet la réponse à un raisonnement.

Considérons par le raisonnement suivant :

(H1) *L'homme est un loup pour l'homme*
(H2) *Jean est un homme*
(H3) *Paul est un homme*

(C) *Certains hommes sont des loups pour certains hommes*[4]

La traduction en LP1 du raisonnement donne les clauses suivantes, avec `H/1` prédicat vrai si son argument est un homme, et `L/2` définit tel que `L(x,y)` est vrai si `x` est un loup pour `y`. `J` et `P` sont deux constantes représentant respectivement Jean et Paul.

(H1) $\forall x \forall y\ [H(x) \wedge H(y) \Rightarrow L(x,y)]$
(H2) $H(J)$
(H3) $H(P)$

(C) $\exists x \exists y\ [H(x) \wedge H(y) \wedge L(x,y)]$

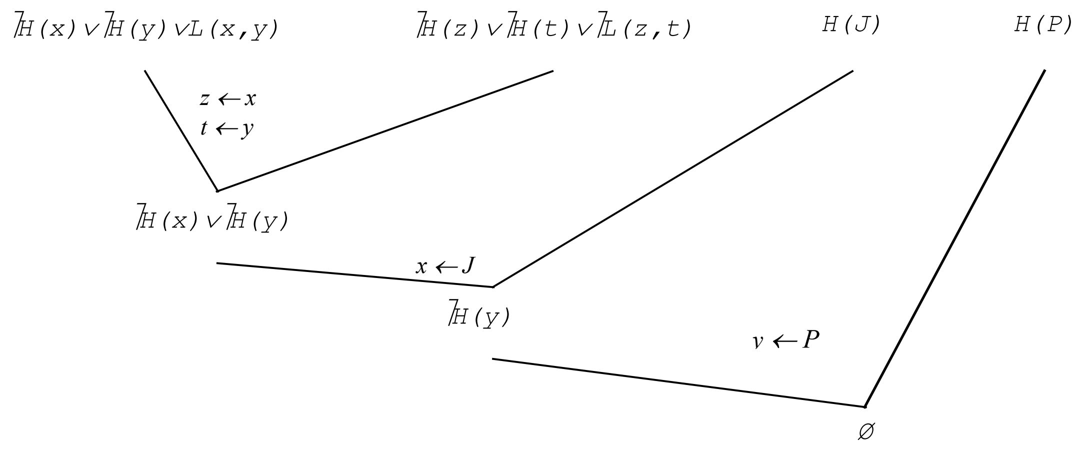
La mise sous forme clausale de la formule de réfutation donne :

(H1) $\neg H(x) \vee \neg H(y) \vee L(x,y)$
(H2) $H(J)$
(H3) $H(P)$

($\neg$C) $\neg H(x) \vee \neg H(y) \vee \neg L(x,y)$

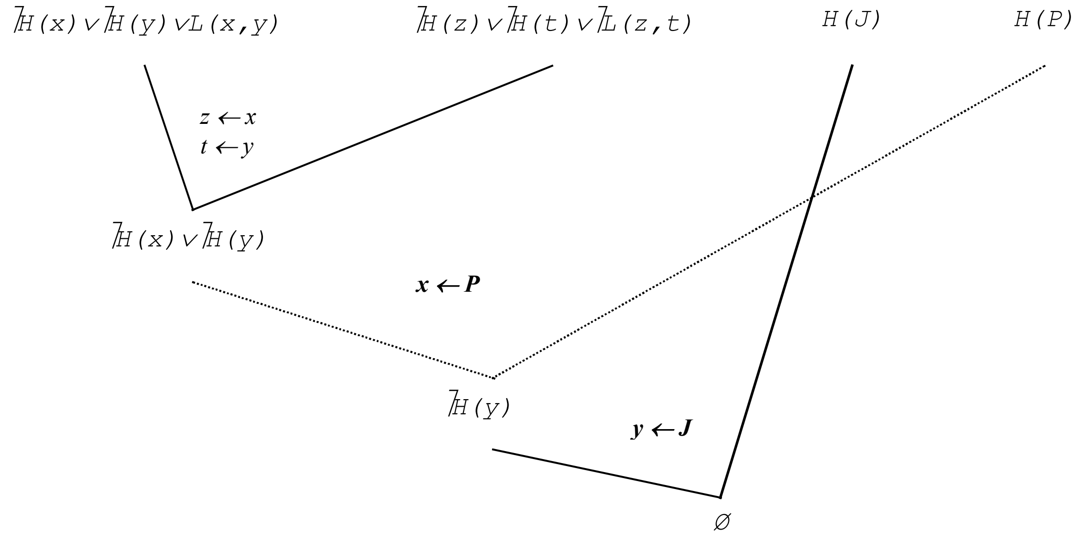
Bien entendu, les variables x et y qui correspondent à la réfutation de la conclusion n'ont rien à voir avec celles de la traduction de la première hypothèse (H1). Il est prudent de renommer les variables de chaque clause pour s'assurer que la formule est sous forme propre (pas de conflit de variables) avant de lancer la résolution. Par exemple : $H(z) \vee \neg H(t) \vee \neg L(z,t)$ La résolution donne alors :

[4] Pour simplifier la démonstration ici, on supposera que l'énoncé *Certains hommes sont des loups pour certains hommes* n'imposent pas nécessairement que les êtres humains en questions soient différents. On s'autorise donc à être un loup pour soit même dans notre représentation logique, ce qui ne présente bien entendu guère d'intérêt.



On arrive à la clause vide, ce qui nous montre bien que le raisonnement est valide. Mais en outre, pour y arriver, nous avons opéré des unifications particulières telles que celles représentée en gras : [x ← J] et [y ← P]. Ici, l'unification nous permet de montrer la validité du raisonnement, mais également nous donne une nouvelle connaissance que l'on peut déduire de ce raisonnement : x = *Jean* et y = *Paul*, soit donc, effectivement, il existe des hommes qui sont des loups pour d'autres, et on en a ici un exemple : *Jean est un loup pour Paul* !

Remarquons que nous aurions pu mener la résolution différemment, ce qui nous aurait conduit à d'autres unifications :



Dans ce cas, on montre à l'inverse que : *Paul est un loup pour Jean…*

On pourrait poursuivre ainsi les résolutions, et trouver toutes les connaissances qui peuvent être tirées de ce raisonnement grâce à l'unification. C'est typiquement ce type de raisonnement automatique que vise le langage Prolog, qui est justement basé sur la logique des prédicats du 1er ordre, et sur l'algorithme de résolution.

6. CONCLUSION : LP0, LP1, DECIDABILITE ET PROLOG

Nous avons étudié, au cours de ces deux premiers chapitres, deux types de logiques : la logique des propositions et celles des prédicats du 1er ordre (LP1). Nous avons vu que la logique des propositions avait un pouvoir moins expressif que la LP1 et qu'elle était incluse dans la LP1. Toutefois, elle a un intérêt pour le calcul automatique, qui est sa décidabilité :

Décidabilité de la logique des propositions

La logique des propositions est ***décidable****, c'est-à-dire que l'on peut toujours montrer qu'une formule de la LP0 est contradictoire ou valide en un nombre fini d'opérations.*

Démonstration – Elle est triviale : il suffit de construire la table de la vérité de la formule, opération qui se réaliser toujours en un nombre fini de calcul par construction…

A l'opposé, la logique des prédicats du 1^{er} ordre, plus puissante en termes de représentativité, pose des problèmes au calcul automatique :

Semi-décidabilié de la logique des prédicats

La Logique des prédicats du 1^{er} ordre est **indécidable** : il existe en effet des formules bien formées de la LP1 dont on ne peut dire en un temps fini si elles sont contradictoires ou non à l'aide d'un algorithme de décision (tel que la résolution par exemple). On peut toutefois montrer que la LP1 est semi-décidable, c'est-à-dire que l'on peut construire des algorithmes de décision qui nous assurent qu'une formule est valide en un temps fini, lorsqu'elle l'est effectivement, mais peut boucler à l'infini si tel n'est pas le cas.

Exercice de cours : indécidabilité de la logique des prédicats du 1^{er} ordre.

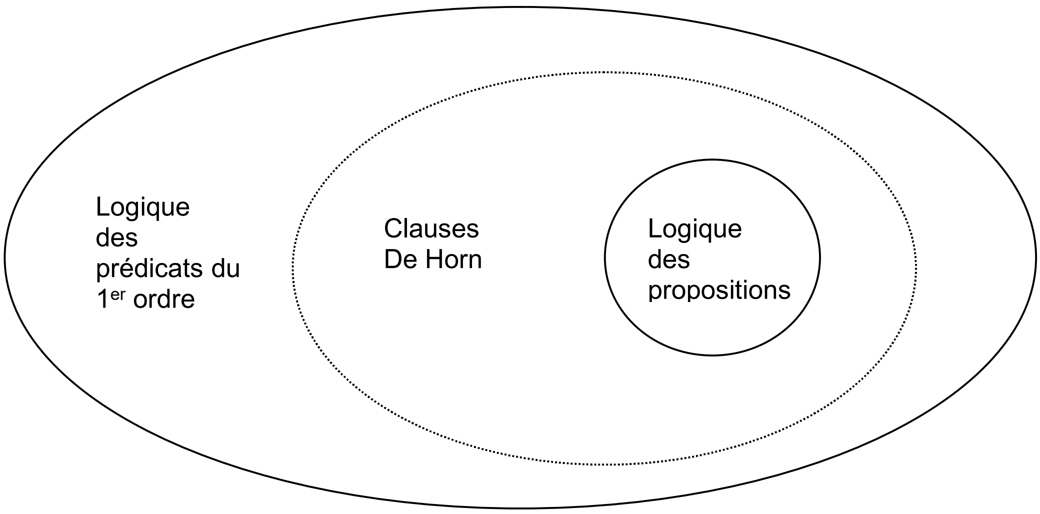
Plutôt que de donner une démonstration générale de l'indécidabilité de la logique des prédicats, nous allons nous concentrer sur l'algorithme de décision qu'est la résolution. Tentez d'appliquer la résolution au raisonnement suivant :

$\forall x\ (\ P(x) \Rightarrow Q(f(x))\ )\ ,\ \forall x\ (\ Q(x) \Rightarrow P(f(x))\ )\ ,\ P(A)\ \models^{?}\ \forall x\ P(x)$

Peut-on conclure en un temps fini que ce raisonnement est valide ou pas ? Pourquoi ? Comparez cette situation avec le cas des raisonnements non valides rencontrés en logique des propositions.

Cette indécidabilité pose bien entendu problème pour l'automatisation de la déduction en logique des prédicats du 1^{er} ordre, alors même que cette logique est seule à même de représenter des raisonnements complexes.

Le langage informatique Prolog s'appuie précisément sur la LP1 pour représenter des problèmes tout en évitant ces problèmes d'indécidabilité. Pour cela, Prolog se réduit à un sous-ensemble de la logique des prédicats, qui est celui constitué par les clauses de Horn. Réduit à cet ensemble, Prolog est décidable. L'intérêt de cette restriction étant qu'elle permet toujours de représenter les règles de base du raisonnement humain, et laisse donc la place une modélisation informatique utile.



De même, le calcul relationnel utilisé dans les bases de données peut être représenté sous une formalisation logique limité aux clauses de Horn. Le chapitre suivant est précisément consacré aux clauses de Horn et au langage Prolog.

Logique des prédicats du premier ordre - Exercices & Problèmes

EXERCICES

Exercice 3.1. — Un peu de syntaxe (objectif 3.1.2 & 3.1.4.)

On se place dans la logique des prédicats du premier ordre et on considère :

- R prédicat d'arité 1, S et T sont des prédicats d'arité 2
- f et g fonctions d'arité 1 h fonction d'arité 2

On considère les formules suivantes :

a) $\exists x\ (\ (\ \forall y\ (\ \exists z\ (\ R(x)\ )\ )\ \vee\ (\ \exists y\ (\ \neg(\ \forall z\ (\ S\ (\ h\ (x,z),\ x))))))$
b) $(\ \forall x\ (\ T\ (\ f(x),\ y\ )))\Rightarrow(\ \neg(\ \exists x\ (\ f(x,y)\ )\ )\ )$
c) $(\ \forall z\ (\ T\ (\ x,\ y\ )))\Rightarrow(\ \exists y\ ((\ \forall x\ (\ \neg(\ S(f(x),\ y\ ))))\ \vee\ T(y,z)\ ))$

1 — Quelles sont, parmi ces formules, celles qui sont bien formées ?
2 — Simplifiez-les formules bien formées en enlevant les parenthèses inutiles.
3 — Déterminez les occurrences liées et les occurrences libres dans les formules bien formées. **(hors programme L1)**
4 — Mettre sous forme propre ces formules si nécessaire **(hors programme L1)**

Exercice 3.2. — Choisir connecteurs et quantificateurs (objectif 3.2.1 & 3.1.2.)

Indiquez quels est (sont) la (ou les) traduction(s) correcte(s) des énoncés suivants.

1. *Certains enfants ne sont pas des anges*

☐ $\forall x\ (\ Enfant(x)\Rightarrow\neg Anges(x)\ )$
☐ $\exists\ x\ (\ Enfant(x)\Rightarrow\neg Anges(x)\ )$
☐ $\neg\forall x\ (\ Enfant(x)\Rightarrow Anges(x)\ )$
☐ $\exists\ x\ (\ Enfant(x)\wedge\neg Anges(x)\ )$
☐ $\forall x\ (\ Anges(x)\Rightarrow\neg Enfant(x)\ )$
☐ $\neg\forall x\ (\ Anges(x)\Leftrightarrow Enfant(x)\ )$

2. *Les carrés sont des parallélogrammes rectangles*

☐ $\forall x\ (\ Carré(x)\wedge Parallélogramme(x)\wedge Rectangle(x)\ )$
☐ $\exists x\ (\ Carré(x)\wedge\ Parallélogramme\ (x)\wedge Rectangle(x)\ )$
☐ $\forall x\ (\ Carré(x)\Rightarrow\ Parallélogramme\ (x)\wedge Rectangle(x)\ )$
☐ $\exists x\ (\ Carré(x)\Rightarrow\ Parallélogramme\ (x)\wedge Rectangle(x)\ )$
☐ $\forall x\ (\ (\neg Parallélogramme\ (x)\wedge\neg Rectangle(x)\ )\Rightarrow\neg Carré(x)\ )$
☐ $\forall x\ (\ (\neg Parallélogramme\ (x)\vee\neg Rectangle(x)\ )\Rightarrow\neg Carré(x)\ )$
☐ $\forall x\ (\ Carré(x)\Leftrightarrow\ Parallélogramme\ (x)\wedge Rectangle(x)\ )$

3. *Certains hommes font le ménage.*

☐ $\forall x\ (\ Menage(x)\ \neg\Rightarrow Femme(x)\ )$
☐ $\neg\forall x\ (\ Menage(x)\ \Leftrightarrow \neg Femme(x)\ )$
☐ $\exists x\ (\ \neg Femme(x) \wedge Menage(x)\ )$
☐ $\exists x\ (\ \neg Femme(x) \wedge \neg Menage(x)\ )$
☐ $\neg\forall x\ (\ Menage(x)\ \Rightarrow \neg Femme(x)\ )$
☐ $\neg\forall x\ (\ \neg Femme(x) \Rightarrow Menage(x)\ )$
☐ $\neg\exists x\ (\ \neg Femme(x) \wedge Menage(x)\ )$

4. *Il y a un PDG dans chaque entreprise*

☐ $\forall x\ \exists y\ (\ Entreprise(x) \wedge PDG(x,y)\ )$
☐ $\exists y\ \forall x\ (\ Entreprise(x) \wedge PDG(x,y)\ )$
☐ $\forall x\ \forall y\ (\ Entreprise(x) \wedge PDG(x,y)\ )$
☐ $\exists x\ \exists\ y\ (\ Entreprise(x) \wedge PDG(x,y)\ )$
☐ $\forall x\ (\ Entreprise(x) \Rightarrow \exists\ y\ PDG(x,y)\ )$
☐ $\exists x\ \ (\ Entreprise(x) \Rightarrow \forall y\ PDG(x,y)\ )$
☐ $\forall x(\ Entreprise(x) \Rightarrow \forall y\ PDG(x,y)\ )$
☐ $\exists x\ \ (\ Entreprise(x) \Rightarrow \exists\ y\ PDG(x,y)\ )$

5. *Tous les fermiers ont un tracteur*

☐ $\forall x\ \exists y\ (Fermier(x) \wedge Tracteur(y) \Rightarrow Possede(x,y))$
☐ $\forall x\ \exists y\ (Possede(x,y) \Rightarrow Fermier(x) \wedge Tracteur(y))$
☐ $\forall x\ \exists y\ (Fermier(x) \wedge Tracteur(y) \wedge Possede(x,y))$
☐ $\forall x\ \exists y\ (Possede(x,y) \wedge Fermier(x) \wedge Tracteur(y))$
☐ $\forall x\ \exists y\ (Fermier(x) \Rightarrow Tracteur(y) \wedge Possede(x,y))$
☐ $\forall x\ \exists y\ (Possede(x,y) \wedge Fermier(x) \Rightarrow Tracteur(y))$
☐ $\forall x\ (Fermier(x) \Rightarrow \exists y\ \ (Tracteur(y) \wedge Possede(x,y)))$
☐ $\forall x\ (Fermier(x) \wedge \exists y\ (Tracteur(y) \wedge Possede(x,y)))$
☐ $\exists y\ \forall x\ (Fermier(x) \wedge Tracteur(y) \Rightarrow Possede(x,y))$
☐ $\exists y\ \forall x\ (Possede(x,y) \Rightarrow Fermier(x) \wedge Tracteur(y))$
☐ $\exists y\ \forall x\ (Fermier(x) \Rightarrow Tracteur(y) \wedge Possede(x,y))$
☐ $\exists y\ \forall x\ (Possede(x,y) \wedge Fermier(x) \Rightarrow Tracteur(y))$

Exercice 3.3. — Traduction : quels connecteurs, mais aussi quelle logique adopter ? (objectifs 3.2.1 & 3.1.2)

Donner la (ou les) fbf(s) qui représentent les énoncés suivants. Comme vous pourrez l'observer, dans certaines situations, le recours à la logique des prédicats n'est peut-être pas nécessaire…

1. *Les catalans ne sont pas tous favorables à l'indépendance de la Catalogne.*

☐ $\text{Catalan} \Rightarrow \neg\text{Independance}$	☐ $\text{Independance} \Rightarrow \neg\text{Catalan}$
☐ $\neg(\text{Catalan} \Rightarrow \text{Independance})$	☐ $\neg\text{Independance} \Rightarrow \neg\text{Catalan}$
☐ $\forall x\ (\text{Catalan}(x) \Rightarrow \neg\text{Independance}(x))$	☐ $\forall x\ (\text{Independance}(x) \Rightarrow \neg\text{Catalan}(x))$
☐ $\neg\forall x\ (\text{Catalan}(x) \Rightarrow \text{Independance}(x))$	☐ $\forall x\ \neg(\text{Independance}(x) \Rightarrow \text{Catalan}(x))$
☐ $\exists x\ (\text{Catalan}(x) \wedge \neg\text{Independance}(x))$	☐ $\exists x\ (\text{Catalan}(x) \Rightarrow \neg\text{Independance}(x))$

2. *Il était nécessaire d'habiter en Catalogne pour pouvoir voter à la consultation sur l'indépendance*

☐ $\text{Habite\_Catalogne} \Rightarrow \text{Vote}$	☐ $\text{Vote} \Rightarrow \text{Habite\_Catalogne}$
☐ $\neg\text{Habite\_Catalogne} \Rightarrow \neg\text{Vote}$	☐ $\neg\text{Vote} \Rightarrow \neg\text{Habite\_Catalogne}$
☐ $\forall x\ (\text{Habite\_Catalogne}(x) \Rightarrow \text{Vote}(x))$	☐ $\forall x\ (\text{Habite\_Catalogne}(x) \wedge \text{Vote}(x))$
☐ $\forall x\ (\text{Vote}(x) \Rightarrow \text{Habite\_Catalogne}(x))$	☐ $\forall x\ (\text{Vote}(x) \wedge \text{Habite\_Catalogne}(x))$
☐ $\neg\exists x\ (\neg\text{Habite\_Catalogne}(x) \wedge \text{Vote}(x))$	☐ $\neg\exists x\ (\text{Habite\_Catalogne}(x) \wedge \neg\text{Vote}(x))$

3. *Un néo-zélandais est toujours meilleur rugbyman qu'un français*

☐ $\forall x \forall y\ (\text{Fr}(x) \wedge \text{NZ}(y) \Rightarrow \text{Meilleur}(y,x))$	☐ $\exists x \exists y\ (\text{Fr}(x) \wedge \text{NZ}(y) \Rightarrow \text{Meilleur}(y,x))$
☐ $\exists x \exists y\ (\text{Fr}(x) \wedge \text{NZ}(y) \wedge \text{Meilleur}(y,x))$	☐ $\forall x \exists y\ (\text{Fr}(x) \wedge \text{NZ}(y) \wedge \text{Meilleur}(y,x))$
☐ $\forall x \forall y\ (\text{Fr}(x) \wedge \text{Meilleur}(y,x) \Rightarrow \text{NZ}(y))$	☐ $\text{Meilleur}(\text{Neozelandais},\text{Francais})$

4. *En ville, tout le monde a au moins un voisin*

☐ $\forall x\ (\text{En\_Ville}(x) \Rightarrow \exists y\ \text{Voisin}(y,x))$	☐ $\forall x \exists y\ (\text{En\_Ville}(x) \Rightarrow \text{Voisin}(y,x))$
☐ $\forall x \exists y\ (\text{En\_Ville}(x) \wedge \text{Voisin}(y,x))$	☐ $\exists y \forall x\ (\text{En\_Ville}(x) \wedge \text{Voisin}(y,x))$
☐ $\text{En\_Ville} \Rightarrow \text{Voisin}$	☐ $\forall x\ \forall y\ (\text{En\_Ville}(x) \wedge \text{Voisin}(y,x))$

5. *Usain Bolt est le coureur le plus rapide au monde*

☐ $\exists x\ \forall y\ \text{Plus\_rapide}(x,y)$	☐ $\forall y\ \exists x\ \text{Plus\_rapide}(x,y)$
☐ $\exists x\ \forall y\ (\text{Bolt}(x) \Rightarrow \text{Plus\_rapide}(x,y))$	☐ $\text{Bolt} \Rightarrow \text{Plus\_rapide}$
☐ $\forall x\ \text{Plus\_rapide}(\text{Bolt},x)$	☐ $\exists x\ \forall y\ (\text{Bolt}(x) \wedge \text{Plus\_rapide}(x,y))$

6. *Aucune forme de vie n'a été trouvée sur Mars*

☐ $\neg\exists x\ (\text{Vivant}(x) \wedge \text{Habite}(x,\text{Mars}))$	☐ $\exists x\ \neg(\text{Vivant}(x) \wedge \text{Habite}(x,\text{Mars}))$
☐ $\neg\exists x\ (\text{Vivant}(x) \Rightarrow \text{Habite}(x,\text{Mars}))$	☐ $\forall x\ \neg(\text{Vivant}(x) \Rightarrow \text{Habite}(x,\text{Mars}))$
☐ $\forall x\ \neg(\text{Vivant}(x) \wedge \text{Habite}(x,\text{Mars}))$	☐ $\forall x\ (\text{Vivant}(x) \Rightarrow \neg\text{Habite}(x,\text{Mars}))$

7. *Des réfugiés ont été accueillis dans toutes les villes*

☐ $\forall x \forall y (\text{Ville}(x) \wedge \text{Refugie}(y) \wedge \text{Accueil}(x,y))$	☐ $\forall x \forall y\ (\text{Ville}(x) \wedge \text{Refugie}(y) \Rightarrow \text{Accueil}(x,y))$
☐ $\exists x \exists y (\text{Ville}(x) \wedge \text{Refugie}(y) \wedge \text{Accueil}(x,y))$	☐ $\forall x \exists y\ (\text{Ville}(x) \wedge \text{Refugie}(y) \Rightarrow \text{Accueil}(x,y))$
☐ $\forall x \exists y (\text{Ville}(x) \wedge \text{Refugie}(y) \wedge \text{Accueil}(x,y))$	☐ $\forall x \exists y\ (\text{Ville}(x) \Rightarrow \text{Refugie}(y) \wedge \text{Accueil}(x,y))$

Exercice 3.4. — Mourir de faim ou de la vache folle : traduction (objectif 3.2.1)

Vache folle, tremblante du mouton, fièvre aphteuse, lasagnes à la viande de cheval, le consommateur français perd d'année en année sa légendaire attirance pour les plaisirs de la table. Totalement désorienté par les annonces alarmistes de médias plus avides de sensationnel que de réflexion, certains parents s'empressent ainsi de retirer leurs chérubins d'une cantine scolaire proposant de la nourriture a priori douteuse, afin de pouvoir les gaver de galettes de tofu bio directement importées des hauts plateaux du Népal.

Une seule réponse à ces comportements passionnels : un recours à la raison, donc à la logique. Mais pour cela, assurons-nous au préalable que nous disposons du bagage nécessaire en logique des prédicats du 1er ordre pour mener à bien ce programme salutaire. Commençons donc par quelques travaux pratiques.

On demande de donner la traduction dans la logique des prédicats du 1er ordre des énoncés ci-dessous. On utilisera pour cela les prédicats suivants : Creutzfeld/1, Manger/2, Boeuf/1, Farines/1, Francais/1.

1) *Aucun bœuf n'est nourrit qu'avec des farines animales.*
2) *Si un bœuf a consommé des farines animales c'est qu'il n'est pas français.*
3) *Personne ne peut contracter la maladie de Creutzfeld-Jacob sans avoir consommé de bœuf.*

Exercice 3.5. — Jeu de construction logique : traduction (objectif 3.2.1)

Monsieur Patate, Madame Patate et Junior Patate sont bien embêtés : après une activité que la morale réprouve certainement, ils ont mélangé tous les éléments de leur anatomie, et ont quelque mal à bien remettre tout en place. La logique va tenter de les aider. Pour cela, il vous est demandé de représenter les énoncés ci-dessous en utilisant les prédicats suivants de la LP1 :

- `Lunette(X)` est vrai si X est une paire de lunette.
- `Oreille(X)` est vrai si X est une paire d'oreilles.
- `Chapeau(X)` est vrai si X est un chapeau.
- `Moustache(X)` est vrai si X est une moustache
- `Sur(X,Y)` est vrai si X est sur Y (ou peut aller sur Y)
- `Patate(X)` est vrai si X est un membre de la famille patate
- `Homme(X)` est vrai si X est un homme (enfin, une patate du genre masculin !)

Donnez les traductions des énoncés dans les cadres prévus à cet effet. Ah, au fait, Mr Patate s'appelle Robert… :

1. *Tous les membres de la famille Patate ont un chapeau sur eux.*
2. *Toutes les paires d'oreille peuvent aller sur tous les membres de la famille Patate*
3. *Il n'existe pas de paire de lunettes qui peut aller sur tous les membres de la famille Patate*
4. *Si un élément est sur Robert, il ne sera pas sur une femme de la famille*
5. *Seuls les hommes de la famille Patate ont une moustache*

Exercice 3.6. — La réussite au bout du chagrin : traduction (objectif 3.2.1)

« *Si l'école m'apprend pas ça alors je dis halte à tout* », chantait Renaud, qui avait apparemment du mal à envoyer sa fille chaque matin « *au chagrin* ». Il est vrai que le système éducatif apparaît souvent (à tort ou à raison ?) à ses usagers comme une course d'obstacle dont la finalité est avant tout d'obtenir des diplômes. En témoigne malheureusement l'inspiration de l'auteur de cet exercice...

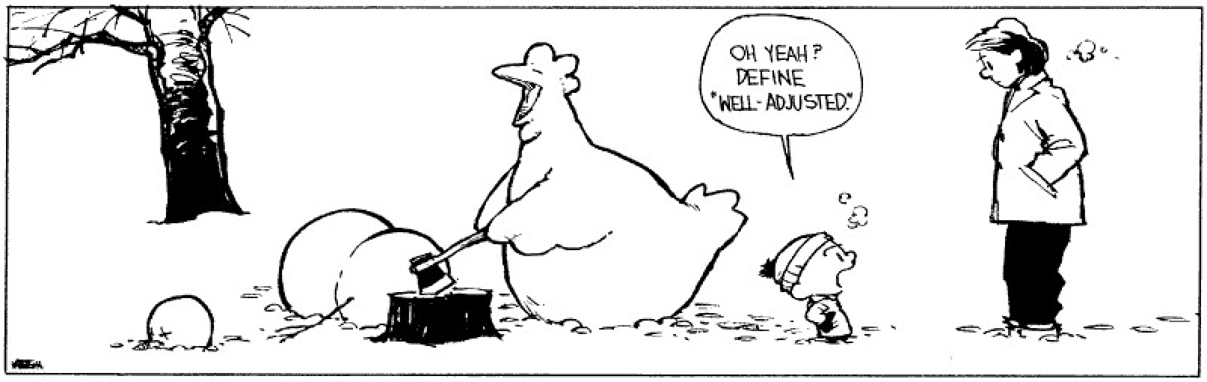
Traduisez en LP1 les énoncés suivants en utilisant les prédicats suivants : ,

- L(x) est vrai si x a obtenu une licence,
- M(x) est vrai si x a obtenu un master,
- B(x) est vrai si x a obtenu un baccalauréat
- P(x) est vrai si x a obtenu un permis de conduire
- D(x) est vrai si x a obtenu un doctorat

1. *Jean ne réussira pas son master sans avoir réussi sa licence.*
2. *Nul ne peut obtenir sa licence s'il a échoué à son bac.*
3. *Il y a des gens qui réussissent leur bac tout en échouant à leur permis de conduire.*
4. *Si on a un master ou un doctorat, c'est qu'on a déjà obtenu son licence.*

Exercice 3.7. — La télé rend fou : traduction (objectif 3.2.1)

A chaque révélation d'un crime perpétré par un adolescent, la télévision est accusée d'amplifier les tendances psychopathes des jeunes du par la diffusion de séries policières trop sanglantes. Ce qui est clair, c'est que les téléspectateurs y trouvent ce qu'ils cherchent comme va nous le montrer un petit raisonnement.



Donnez la traduction, en logique des prédicats du 1er ordre, du raisonnement ci-dessous. On utilisera pour cela les prédicats `Personne/1, Tele/1, Regarde/2, Psycho/1, Criminel/1, Nevrose/1, Montre/2`.

Tout téléspectateur qui regarde la télévision devient psychotique à la longue
Certains psychotiques ne regardent jamais télévision
Si un criminel n'est pas psychotique, alors il est névrosé
TF1 ne montre à longueur d'antenne de des criminels
Donc les gens que l'on voit à la télé sont … des téléspectateurs

Exercice 3.8. — Le panda est un loup pour le bambou (objectif 3.2.1)

Symbole de la Chine éternelle, le panda est un animal dont le régime alimentaire est un des plus spécialisés, ce qui n'est pas fait pour freiner sa dramatique extinction. Il se nourrit en effet quasiment exclusivement de feuilles du bambou. Autant dire que pour le bambou, le panda n'apparaît pas comme un bon gros nounours tout mignon, mais un terrible criminel contre l'humanité, sanguinaire et sans pitié. Mais qui se soucie des angoisses du pauvre bambou...

Traduire en LP1 les énoncés ci-après en utilisant les 5 prédicats suivants :

- Mange(x,y) est vrai ssi x mange y.
- Herbivore(x) est vrai ssi x est un animal herbivore.
- Vegetal(x) est vrai ssi x est un végétal.
- Bambou(x) est vrai ssi x est un bambou.
- Panda(x) est vrai ssi x est un panda.

1. Les herbivores ne mangent que des végétaux.
2. Aucun herbivore ne mange tout type de végétal.
3. Il y a des végétaux que ne mange aucun herbivore.
4. Les pandas sont des herbivores qui ne consomment que des bambous

Exercice 3.9. — Casse-tête au département informatique (objectif 3.2.1)

Chaque année à la rentrée, la consommation d'aspirine augmente dangereusement dans les rangs des directeurs de filières du département informatique. Tous sont en effet taraudés par la même question : comment arriver à caser un emploi du temps sachant que le nombre de salles disponibles est inférieur au nombre de groupes d'étudiants… Les difficultés vont d'année en année croissants. En effet, bien des enseignants ne se contentent plus d'une salle avec craie et tableau noir : bien souvent, il faut également tenir compte des besoins en tableau blanc interactif (TBI) ou en vidéoprojecteurs. Puisque chaque année vos serviteurs s'arrachent les cheveux à vous concocter un emploi du temps aux petits oignons, à vous maintenant d'attraper la migraine sur les traductions suivantes…

Traduire les énoncés suivants dans la logique des prédicats du 1er ordre. On utilisera pour cela les prédicats Tbi/1 , Vidéoproj/1, Panne/1, Amphi/1, Salle_td/1, Est_dans/2.

a) *On trouve toujours un TBI dans une salle de TD.*

b) *Il n'y a pas de vidéoprojecteur en salle « B301 ».*

c) *Tous les vidéoprojecteurs sont dans des amphis.*

d) *S'il y a un vidéoprojecteur quelque part, c'est qu'il s'agit d'un amphi.*

e) *Il n'y a que des TBI dans les salles de TD.*

Exercice 3.10. — un peu de rangement : traduction (objectif 3.2.1)

Deux heures du matin. Sous perfusion de caféine depuis le début de l'après-midi, Bertrand Jémoitou vient enfin de finir la révision de son cours de logique. Après 10 heures de combats homériques contre la multitude de polycopiés que le prof distribue chaque semaine, sa chambre est un vrai capharnaüm. Dire qu'il va falloir tout ranger avant d'aller se coucher ! Procédant avec méthode, Bertrand Jémoitou prononce les énoncés ci-dessous, que l'on vous demande de représenter en logiques des prédicats du 1er ordre.

On utilisera 4 prédicats unaires destinés à l'identification des objets décrits dans ces énoncés (par exemple, Feuille(x) a pour signification : x est une feuille), et le prédicat Dans(x,y) vrai si et seulement si x est dans y.

(1) *Tous les tiroirs contiennent des feuilles.*
(2) *Aucun des classeurs ne contient de polycopiés.*
(3) *Dans l'un des classeurs, il n'y a que des polycopiés.*
(4) *Si les polys ne sont pas dans les classeurs, elles sont dans des tiroirs.*
(5) *S'il y a des feuilles dans un tiroir, on est certain de ne pas y trouver de polys.*

Exercice 3.11. — Harry Potter et la formule logique : traduction (objectif 3.2.1)

En utilisant les prédicats Sorcier/1, Parent/2, Malefique/1, Ensorcele/1, Ancetre/2, Grifondor/1 donnez la traduction en LP1 des énoncés suivants :

1 — *Les parents des sorciers ne sont pas tous des sorciers*
2 — *Tout sorcier a au moins un non sorcier parmi ses ancêtres*
3 — *Les sorciers ne sont pas tous maléfiques*
4 — *Un Grifondor est soit non maléfique, soit ensorcelé.*
5 — *Il n'y a aucun étudiant de Grifondor qui soit maléfique*
6 — *Il faut nécessairement être sorcier pour être maléfique.*

Exercice 3.12. — CP1 : propriété de la relation d'ordre (objectif 3.2.2)

On considère les deux fbf suivantes :

(F1) $\forall x \forall y \forall z\ (\ P(x,z) \wedge P(z,y) \Rightarrow P(x,y)\ )$

(F2) $\forall x \forall y\ (\ P(x,y) \wedge P(y,x) \Leftrightarrow (x = y)\ )$

Déterminez la valeur de vérité de ces formules pour l'interprétation I = {*D* = $\aleph$ (entiers naturels) ; Ip : P(x,y) vrai ssi x $\leq$ y ; = : égalité }

Exercice 3.13. — Interprétation et différences entre quantifieurs (objectif 3.2.2)

On considère les trois formules suivantes :

(1) $\forall y\ (\ \neg P(y) \Rightarrow \exists x\ (S(x,2) \wedge D(x,y))\ )$

(2) $\exists y\ (\ \neg P(y) \Rightarrow \forall x\ (S(x,2) \wedge D(x,y))\ )$

(3) $\exists y\ (\ \neg P(y) \wedge\ \forall x\ (S(x,2) \wedge D(x,y))\ )$

Le domaine d'interprétation est l'ensemble des entiers naturels. L'interprétation de S est la relation d'inégalité $\geq$, celle de D est la relation divise au sens de la division euclidienne définie sur les entiers (i.e. D(x,y) est vrai si x est un diviseur de y), P est la prédicat qui est vrai pour les nombres premiers. Donner, dans cette interprétation, les valeurs de vérité de chaque formule.

Exercice 3.14. — Encore des mathématiques (objectif 3.2.2.)

R et *S* sont deux prédicats d'arité 2 du langage des prédicats du 1er ordre. On considère les deux formules suivantes :

(F1) $\exists x\ \forall y\ (\ R(x,y) \Rightarrow S(x,y)\ )$

(F2) $\forall x\ \exists y\ (\ R(x,y) \Rightarrow S(x,y)\ )$

Le domaine d'interprétation est l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. L'interprétation de R est la relation d'inégalité $\leq$, celle de S est la relation divise au sens de la division euclidienne définie sur les entiers.

1. Donner, dans cette interprétation, les valeurs de vérité respectives des formules F1 et F2.

Réponse — I(F1) = F ; I(F2) = V.

2. En gardant les mêmes interprétations pour R et S, modifier le domaine d'interprétation pour que les deux formules soient vraies.

Exercice 3.15. — Interprétation et modèles ? (objectif 3.2.2)

On considère la fbf de la LP1 suivante $\phi \equiv \forall x\ \exists y\ Inf(x,y)$ avec $Inf(x,y)$ vrai si $x < y$.

1. Donnez la valeur de vérité de la formule ϕ pour les domaines d'interprétation D suivants :

$D = \Re$ (réels)	$D = \{0,1\}$
$D = \varnothing$	$D = \{0\}$

2. Donnez un modèle de votre choix de la fbf $\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$

Exercice 3.16. — Forme prenexe et calcul des prédicats (objectif 3.2.2 et 3.2.4)

En prenant des exemples bien choisis de formules A et B ainsi qu'une interprétation de ces dernières, montrer pourquoi on ne peut avoir d'équivalence entre :

1. $\forall x\ A \vee \forall y\ B$ et $\forall x\ (A \vee B)$
2. $\exists x\ A \wedge \exists y\ B \equiv \exists x\ (A \wedge B)$

Exercice 3.17. — Mise sous forme prenexe (objectif 3.2.4)

Mettre sous forme prenexe les formules suivantes

1. $\exists x\ \neg P(x) \vee \forall x\ Q(x)\ )$

2. $\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ Q(x)$

Exercice 3.18. — Mise sous forme clausale (objectif 3.2.4)

1. $\forall x\ A(x) \vee \forall y\ \exists z\ B(y,z))$

2. $\forall x\ \exists y\ \forall z\ [\ R(x,y,z) \Rightarrow \forall t\ \exists u\ S(t,u)\ ]$

3. $\forall x\ R(x) \Leftrightarrow \forall z\ R(z)$

4. $\forall x\ \forall y\ (\ GP(x,y) \Rightarrow \exists z\ (\ P(x,z) \wedge P(y,z)\ )\ )$

5. $\forall x\ [\ P(x) \wedge \forall y\ \exists t\ (\ \neg Q(t,y) \Rightarrow \forall z\ R(A,t,y)\ )\ ]$

6. $\forall x\ \exists y\ [\ R(y,x) \Rightarrow \exists u\ R(u,x) \wedge \neg \exists t\ \ R(t,x)\ \ ]$

Exercice 3.19. — Unification : cas d'école (objectif 3.1.5, 3.1.6. & 3.2.5)

Trouvez, quand il existe, un unificateur de chacun des ensembles de clauses ci-dessous. Donnez en outre la fbf résultante de l'unification opérée sur ces clauses :

a — $G(x, f\ (A, y)\ )$ $\quad G(x, B)$ $\quad G(x, f(A, g(z)\ )\ )$

b — $P(u, g(\ f(a, b)\ ), u\ )$ $\quad P(\ f(x, g(z)), x, f(y, g(b)\ )\ )$

c — $G(x,y)$ $\quad G(\ f(x), A\ )$

Exercice 3.20. — Quelques unifications trop tranquilles... (objectif 3.1.6. & 3.2.5)

Pour chaque cas, dire si les deux formules atomiques sont unifiables et en donner le cas échéant un unificateur :

a — $A(x, g(x,y)\ )$ $\quad A(g(y, z), g\ (\ g(\ h(u), y)\ , h(u)\ )\ )$

b — $B(x, f(g(y)), f(x))$ $\quad B(h(t,z),f(z),f(h(y,z)))$

c — $P(x, f(x), g(f(x),x))$ $P(z, f(f(A)), g(f(g(A,z)), v))$
d — $P(u, g(f(A,b)), u)$ $P(fx, g(z)), x, f(y, g(B)))$
e — $P(x, f(x), f(f(x)))$ $P(f(f(y)), y, f(y))$

Réponse — formules unifiables : b et d.

Exercice 3.21. — Résolution : cas d'école (objectif 3.1.7 & 3.2.6.)

Préciser, en appliquant la méthode de résolution, si les ensembles de clauses suivantes sont contradictoires ou non.

1. $S(z)$ $S(A) \vee S(t)$ $\neg S(A) \vee \neg S(y)$
2. $\neg Q(A)$ $P(x,f(x))$ $\neg P(z,t) \vee Q(z)$
3. $A(A)$ $N(B)$ $\neg A(x) \vee \neg N(x)$
4. $\neg P(x) \vee Q(f(x))$ $\neg Q(y) \vee P(f(y))$

Exercice 3.22. — Unification et résolution (objectifs 3.1.6. & 3.1.7.)

Lorsque cela est possible, donnez la résolvante correspondant à l'application de l'unification sur les clauses ci-dessous. On précisera à chaque fois l'unificateur utilisé.

1. $A(x,Jean) \vee B(Jean,y)$ et $A(z,Paul) \vee \neg B(Pierre,t)$
2. $A(y,Jean) \vee B(Jean,y)$ et $A(Paul,z) \vee \neg B(t,Pierre)$
3. $\neg A(Paul,Jean) \vee B(Jean,y)$ et $A(Paul,Jean) \vee \neg B(Jean,t)$
4. $A(x,Jean) \vee B(Jean,f(x))$ et $A(x,y) \vee \neg B(Jean,g(t))$
5. $A(x,Jean) \vee B(Jean,y)$ et $A(x,Jean) \vee \neg B(Jean,f(y))$

Exercice 3.23. — Une petite résolution complète (objectif 3.2.6)

Montrez, à l'aide du principe de résolution, la validité du raisonnement suivant (transitivité de l'implication) : $\forall x\,(P(x) \Rightarrow Q(x))\,,\ \forall x\,(Q(x) \Rightarrow R(x)) \models \forall x\,(P(x) \Rightarrow R(x))$

Exercice 3.24. — Quelques résolutions un peu plus complexes (objectif 3.2.6)

Préciser, en appliquant la méthode de résolution, si les ensembles de clauses suivantes sont contradictoires ou non.

1. $P(A,y) \vee P(y,A)$ $\neg Q(z) \vee S(z)$ $\neg R(u) \vee Q(u)$ $\neg S(x)$
2. $\neg H(x) \vee P(x)$ $\neg D(y) \vee \neg P(y)$ $H(z) \vee \neg I(z)$ $D(F)$ $I(F)$

Exercice 3.25. — Quelques résolutions ! (objectif 3.2.1 & 3.2.6)

Montrer en utilisant le principe de résolution que les raisonnements suivants sont valides.

a.
$$\frac{\forall x\, \exists y\, P(x,y) \qquad \forall z \forall t\,(P(z,t) \Rightarrow Q(z))}{\forall u\, Q(u)}$$

b.
$$\frac{\forall x\,(P(x) \Rightarrow P(f(f(x)))) \qquad \forall x\,(P(x) \Rightarrow R(f(x)))}{\forall x\,(R(x) \Rightarrow P(f(x)))}$$

c. $\forall x\ (\ P(x) \Rightarrow Q(s(x))\ )$
$\forall x\ (\ Q(x) \Rightarrow P(s(x))\ )$
$P(A)$

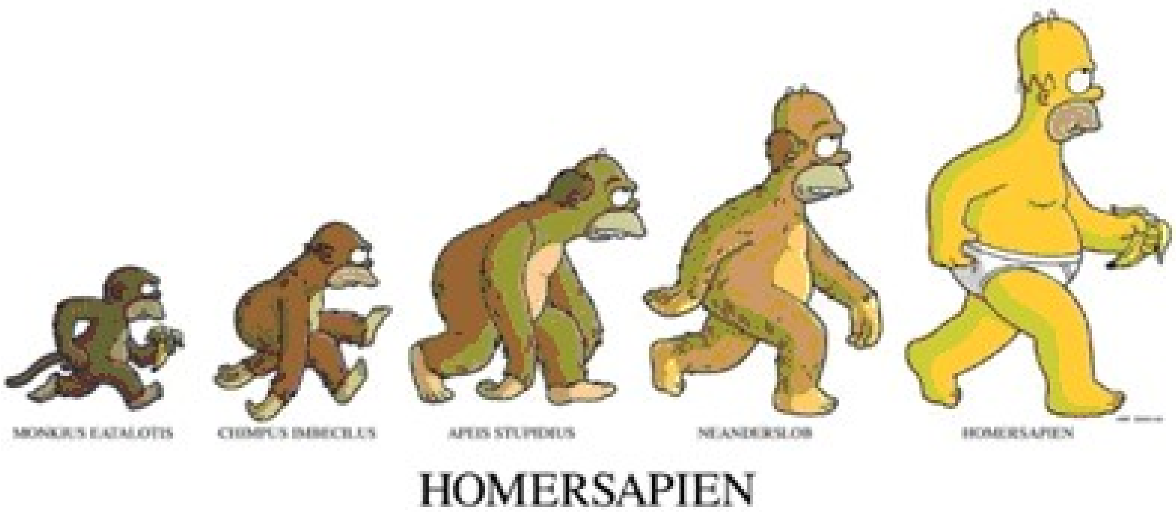
$P(s(s(s(s(A)))))$

Exercice 3.26. — Oh punaise, un exercice combinant traduction et résolution ! (objectif 3.2.1 & 3.2.6)

Démontrez la validité des raisonnements suivants à l'aide du principe de résolution. Nous avons déjà réalisé la traduction en LP1 du premier raisonnement.

a. *Tout homme est un singe supérieur*
Tout singe supérieur est un primate
Les dauphins ne sont pas des primates
Il y a des dauphines qui sont intelligents

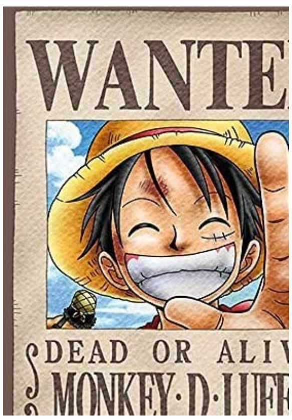
Donc il est possible de ne pas être un homme tout en étant intelligent



b. *Lisa Simpson est intelligente*
Bart Simpson a une intelligence très limitée (i.e. il n'est pas intelligent)
Homer Simpson est moins intelligent qu'un donuts (i.e. il n'est pas intelligent)
Lisa Simpson et Bart Simpson sont les enfants de Homer Simpson.

Donc l'intelligence n'est pas héréditaire (on n'a pas nécessairemnt la même intelligence que ses parents)

Exercice 3.27. — 25 ans de vie commune (objectif 3.2.1.& 3.2.6)



Le manga *One Piece* est un phénomène publié depuis maintenant 25 ans. Sa lecture a ainsi accompagné toute l'existence de certains fans depuis leur adolescence. Le mangaka Eiichirō Oda ayant annoncé qu'il pensait à la fin de la série dans les années à venir, ce sera pour iels un gros manque à venir. Pour les aider à se désintoxiquer, vite, un exercice.

Déterminez, en utilisant le principe de résolution après les avoir traduits en logique des prédicats du 1[er] ordre, si les énoncés ci-dessous sont valide ou non :

a. Un shonen est un manga destiné à des hommes de 8 à 18 ans
One Piece est un shonen

Donc aucun adulte ne lit *One Piece* (c'est cela, oui…)

b. Un seigin est un manga destiné aux adultes
Il y a des adultes qui lisent *One Piece.*

Donc *One Piece* est un seigin

Exercice 3.28. — Art & logique (objectif 3.2.1.& 3.2.6)

On considère les deux raisonnements suivants :

a. *Certains peintres ont peint leur propre portrait.*
Certains peintres ont peint des nus

Certains autoportraits sont ceux de peintres de modèles vivants (i.e. de nus)

b. *Cézanne a fait son autoportrait.*
Cézanne a peint plusieurs nus [baigneuses]

Certains autoportraits sont ceux de peintres de modèles vivants (i.e. de nus)

1 — Ces raisonnements vous paraissent-ils valides ?

2 — Donnez une représentation de ces raisonnements en logique des prédicats du premier ordre. On utilisera pour cela les prédicats `Peintre/1, Peinture_de/2` et `represente/2.`

3 — En utilisant la méthode de résolution, justifiez vos réponses à la première question.

Exercice 3.29. — Logique et religion (objectifs 3.2.1 & 3.2.6)

Suite à la découverte de l'Amérique et de ses habitants, une des questions qui agita l'église catholique fut de savoir si les amérindiens avaient une âme. Cette question, qui fut tranchée favorablement (controverse de Valladolid), n'était pas sans arrière-pensée : elle justifiait ou non le recours à l'esclavage. La logique aurait-elle pu être mise à contribution dans ce débat religieux ?

Considérons le raisonnement suivant :

Les amérindiens sont tous des êtres humains
Les êtres humains ont une âme

Il y a des amérindiens qui ont une âme

a. Donnez une représentation logique de ce raisonnement.

b. Donnez la liste des clauses de la formule de réfutation associée au raisonnement.

c. Ce raisonnement est-il valide ?

d. Ce résultat était-il prévisible ? Justifiez votre réponse dans le cadre ci-dessous

Problèmes

Problème 3.1 — Instruction civique : traduction (objectif 3.2.1)

Donnez **une** représentation des énoncés suivant en logique des prédicats du premier ordre :

a — *Nul n'est sensé ignorer la loi*

b — *Les hommes naissent et demeurent libres et égaux en droits*

(Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen du 26 Août 1789, article premier).

c — *Tout homme étant présumé innocent jusqu'à ce qu'il ait été déclaré coupable*

(Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen du 26 Août 1789, article IX).

d — *Nul ne doit être inquiété pour ses opinions,* [même religieuses] *pourvu que leur manifestation ne trouble pas l'ordre public établi par la loi*

(Déclaration des Droits de l'Homme et du Citoyen du 26 Août 1789, article X).

Problème 3.2 — Questions de quantificateurs : modèles (objectifs 3.1.3 & 3.2.3.)

Lorsque vous êtes amenés à faire des traductions en LP1, le choix des bonnes combinaisons entre quantificateurs et connecteurs logiques vous pose souvent problème. Considérons par exemple les deux énoncés suivants :

(1) $\forall x \, (P(x) \Rightarrow Q(x))$ (2) $\exists x \, (P(x) \wedge Q(x))$

1. Trouvez un modèle de (1) qui rend faux (2).

2. Trouvez un modèle de (2) qui rend faux (1).

Problème 3.3 — On est toujours le modèle de quelqu'un (objectifs 3.1.3 & 3.2.3.)

1. On considère les deux formules bien formées de la LP1 suivantes :

(1) $\forall x \, \exists y \, (P(x) \wedge Q(x,y))$
(2) $\exists x \, \forall y \, (P(x) \wedge Q(x,y))$

a) Donnez un modèle de la formule (1) pour lequel la formule (2) est fausse.
b) Inversement, donnez un modèle de la formule (2) pour lequel la formule (1) est fausse.

2. On considère cette fois l'ensemble de formules de la logique des prédicats du 1er ordre suivant :

1) $\forall x \, [P(x) \Rightarrow \exists y \, Q(x,y)]$
2) $\exists x \, [P(x) \Rightarrow \forall y \, Q(x,y)]$

Donnez un modèle de la formule (2) pour lequel la formule (1) est fausse.

Problème 3.4 — Modèles en LP1 (objectif 3.2.3.)

On se place dans la logique des prédicats du premier ordre. On considère, outre le symbole de la relation binaire égalité, deux symboles de fonctions unaires f et g pouvant recevoir diverses interprétations. On définit les formules suivantes :

F1 : $\forall x \, (f(x) = g(x))$
F2 : $\forall x \, \forall y \, (f(x) = g(y))$
F3 : $\forall x \, \exists y \, (f(x) = g(y))$

Donner un modèle pour chacune des formules : F1 $\neg\wedge$ F2, F2, $\neg$F1 $\wedge$ F3.

Problème 3.5 — Résolution : un exemple d'indécidabilité (objectif 3.1.8)

Nous avons vu en cours que la logique des prédicats du premier ordre était indécidable. Nous allons précisément étudier dans cet exercice un exemple flagrant d'indécidabilité.

Appliquez le principe de résolution sur le raisonnement suivant :

$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(f(x)))\ ,\ \forall x\ (Q(x) \Rightarrow P(f(x)))\ ,\ P(A) \models \forall x\ P(x)$

Peut-on conclure que le raisonnement est valide ? Si non, essayez de montrer que la conclusion n'est pas une conséquence sémantique des hypothèses en exhibant un contre-exemple.

Problème 3.6 — Les chargés de la route : traduction et résolution (objectifs 3.2.1 & 3.2.6)

La traduction sous forme logique des raisonnements humains est une science pleine de risque. Tout d'abord, nous avons souvent eu l'occasion de constater que la mise sous forme logique d'un énoncé en langue naturelle n'était le plus souvent ni triviale, ni directe. Mais en outre, le raisonnement humain recèle moult sous-entendus qui, s'ils ne sont pas explicités, rendent le raisonnement logique totalement incohérent. L'exemple suivant, tiré des phénomènes de dopage dans le monde cycliste, va éclairer ce dernier point.

Bien que ses coéquipiers aient avoué dans leur grande majorité être aussi chargés que — dixit un enquêteur de la police judiciaire — "un bifteck de veau aux hormones", l'ancien cycliste Lance Armstrong a longtemps affirmé n'avoir eu recours à aucun produit prohibé

Ce « champion » cycliste se révèle peut-être ici sur un terrain sur lequel on ne l'attendait pas, celui de la logique. S'il en connaît bien les principes, celui-ci peut en effet affirmer sans crainte que la conclusion du raisonnement suivant, à première vue correct, n'est pas une conséquence sémantique des hypothèses:

(1) Si tu te dopes, tu peux soit gagner, soit être pris.
(2) Si tu es un super coureur, tu peux gagner, que tu sois dopé ou non.
(3) Lance Armstrong, qui n'est pas un super coureur, gagne des épreuves

---

(4) Lance Armstrong se dope

1 — Traduire ce raisonnement en utilisant la logique des prédicats du 1er ordre.

2 — En appliquant la méthode de résolution, montrez que ce raisonnement n'est pas valide.

3 — Quelle affirmation, non formulée dans le raisonnement ci-dessus, nous permettrait de conclure ? Quelle hypothèse complète-t-il implicitement ? Traduisez sous forme logique cette hypothèse implicite et montrez que le raisonnement est effectivement valide.

Problème 3.7 — Malavita : traduction et résolution (objectifs 3.2.1 & 3.2.6)

Réfugié à Chollong-sur-Arve, petite bourgade de Normandie, Giovanni Manzoni, chef mafieux désormais repenti et recherché par toutes les familles de la mafia New-Yorkaise pour les avoir trahi, réfléchit sur sa vie, son passé. N'étant jamais allé à l'université, il peine à analyser de manière logique les idées qui lui viennent à la tête.

Pourriez-vous l'aider en donnant la traduction, en logique des prédicats du 1er ordre, des énoncés ci-dessous ? On utilisera les prédicats `Voleur`/1, `Assassin`/1, `Criminel`/1, et `Famille`/2 et on se placera dans le domaine d'interprétation de l'ensemble des êtres humains

1 — *Certaines personnes sont des assassins*
2 — *Tout assassin a déjà volé*
3 — *Les voleurs ne sont pas tous des assassins*
4 — *Un criminel ne peut être qu'un assassin ou un voleur (ou les deux)*
5 — *Il y a un criminel dans ma famille* (c'est-à-dire la famille de Giovanni Manzoni)
6 — *Tous les membres de ma famille* (i.e. celle de Giovanni Manzoni) *sont des voleurs*

Giovanni en arrive alors à la conclusion suivante : *Il n'y a pas de voleurs dans ma famille*. Nous allons utiliser la méthode de résolution pour tester la validité de son raisonnement.

1. Donnez l'ensemble des clauses correspondant à la mise sous forme clausale de la formule de réfutation correspondant à ce raisonnement.

2. Donnez l'arbre de résolution LP1 qui vous permet de montrer que le raisonnement est ou n'est pas valide

Problème 3.8 — Les aliens sont parmi nous : traduction et résolution (objectif 3.2.1 & 3.2.6)

Une étrange rumeur court au sein de la famille Patate et de ses semblables : des extra-légumes se seraient glissés au sein de la communauté. Afin de les démasquer, Monsieur Patate échafaude quelques raisonnements subtils. Pourriez-vous représenter ces derniers dans la logique des prédicats du 1er ordre, puis vérifier à l'aide de la méthode de résolution que Monsieur Patate ne raisonne pas comme une courge, c'est-à-dire que ses raisonnements sont valides… On utilisera pour cela les prédicats suivants :

- AL(X) — est vrai si X a un sabre laser.
- P (X) — est vrai si X est une (vraie) patate (i.e. pas un extra-légume)
- AM(X) — est vrai si X a un masque.

ainsi que la fonction v(X) qui désigne le voisin de tout individu X. Mr Patate s'appelle toujours Robert, et on supposera que tout non patate est un extra-légume (et inversement).

Raisonnement 1

Les extra-légumes ont un masque
Robert a un sable laser
Le voisin de Robert n'a pas de sabre laser
Il existe donc extra-légumes

Raisonnement 2

Les extra-légumes ont un masque
Robert n'a pas de masque
Donc Robert n'est pas un extra-légume

Raisonnement 3

Les extra-légumes ont un masque
Les patates n'ont pas de masque
Toute personne qui a un masque n'est pas une patate

Problème 3.9 — De l'art de la contradiction : résolution (objectifs 3.1.7. & 3.2.6)

La résolution appliquée à la logique des prédicats ne sert pas à montrer la validité d'un raisonnement, mais avant tout la contradiction d'une formule ou d'un ensemble de formules. Considérons par exemple l'ensemble des formules suivantes :

(A) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [\ (F(x,y) \wedge F(y,z)) \Rightarrow G(x,y)\ ]$

(B) $\forall x\ \exists y\ F(y,x)$

(C) $\neg[\ \forall x\ \exists y\ G(y,x)\ ]$

1. En utilisant la résolution, montrez que cet ensemble de clauses est contradictoire.

2. La résolution montre que les 3 formules sont toutes nécessaires à l'inconsistance de l'ensemble. Montrer que l'ensemble des clauses réduites à (A,B) est satisfaisable en en donnant un modèle. Faire de même avec (A,C).

Problème 3.10 — Démonstration de règles d'équivalence (objectif 3.2.2.)

Démontrez la validité des formules suivantes en partant de la définition des interprétations des quantificateurs existentiels et universels.

a. $\forall x\ [\ A(x) \wedge B(x)] \Leftrightarrow \forall x\ A(x) \wedge \forall x\ B(x)$ *distributivité de $\forall$ sur $\wedge$*

b. $\exists x\ [\ A \wedge B(x)] \Leftrightarrow A \wedge \exists x\ B(x)$ *distributivité de $\exists$ sur $\wedge$ et A formule close*

c. $\exists x\ \forall y\ R(x,y) \Rightarrow \forall y\ \exists x\ R(x,y)$ *commutativité partielle de $\exists$ et $\forall$*

d. $\exists y\ [\ R(x,y) \Rightarrow R(x,x)\ ]$

Problème 3.11 — Résolution … et intuition (objectif 3.1.7. & 3.2.6)

On considère les trois hypothèses suivantes :

(H1) $\forall x\ \forall z\ (\exists y\ R(x,y,z) \Leftrightarrow S(z,x))$
(H2) $\forall x \forall y\ (\ S(x,y) \Rightarrow S(f(x),f(y)))$
(H3) $\forall x\ \forall y\ (\neg R(x,y,x))$

On considère maintenant les trois conclusions suivantes :

(C1) $\exists x\ \neg S(f(x),f(x))$

(C2) $\forall x\ \exists y\ \neg S(f(x),y)$

(C3) $\exists y\ \forall x\ \neg S(f(x),y)$

1. Déterminez par intuition quelles sont parmi ces conclusion celles qui sont sans doute les conséquences sémantiques de l'ensemble des trois hypothèses. Pour chacune des conclusions, et montrez ce résultat à l'aide de la méthode de résolution.
2. Pour celles qui ne sont pas conséquence sémantiques des hypothèses, trouver un modèle des hypothèses où la conclusion est fausse.

Réponses aux exercices et problèmes

Exercices

Exercice 3.1. — Traduction : choisir connecteurs et quantificateurs

5. *Tours les fermiers ont un tracteur*

☐ ∀x ∃y (Fermier(x) ⇒ Tracteur(y) ∧ Possede(x,y))

☐ ∀x (Fermier(x) ⇒ ∃y (Tracteur(y) ∧ Possede(x,y)))

Exercice 3.2. — Traduction : quels connecteurs, quelle logique ?

1. *Les catalans ne sont pas tous favorables à l'indépendance de la Catalogne.*

☐ ¬(Catalan ⇒ Independance)
☐ ¬∀x (Catalan(x) ⇒ Independance(x))
☐ ∃x (Catalan(x) ∧ ¬Independance(x))

2. *Il était nécessaire d'habiter en Catalogne pour pouvoir vote à la consultation sur l'indépendance*

☐ Vote ⇒ Habite_Catalogne	☐ ¬Habite_Catalogne ⇒ ¬Vote
☐ ∀x (Vote(x) ⇒ Habite_Catalogne(x))	☐ ¬∃x (¬Habite_Catalogne(x) ∧ Vote(x))

A vous de jouer pour les questions suivantes…

Exercice 3.10 — un peu de rangement : traduction (objectif 3.2.1)

Il existe le plus souvent plusieurs traductions assez directes en logique des prédicats du 1er ordre pour modéliser un énoncé ou un problème donné. Toutes sont équivalentes logiquement. Voici pour cet exercice une solution, parmi d'autres possibles, pour chaque énoncé proposé.

(1) *Tous les tiroirs contiennent des feuilles.*

∀t (Tiroir(t) ⇒ ∃f (Feuille(f) ∧ Dans(f,t))

(2) *Aucun des classeurs ne contient de polycopiés.*

¬ ∃c∃p (Classeur(c) ∧ Poly(p) ∧ Dans(p,c))

(3) *Dans l'un des classeurs, il n'y a que des polycopiés.*

∃c (Classeur(c) ∧ ∀o (Dans(o,c) ⇒ Poly(p)))

(4) *Si les polys ne sont pas dans les classeurs, ils sont dans des tiroirs.*

Ici il fallait voir qu'il y avait implication entre 2 énoncés complexes, dont le premier correspond d'ailleurs à l'énoncé (2) ci-dessus.

¬∃c∃p (Classeur(c)∧Poly(p)∧Dans(p,c)) ⇒ ∀p (Poly(p)⇒ ∃t (Tiroir(t)∧ Dans(p,t))

(5) *S'il y a des feuilles dans un tiroir, on est certain de ne pas y trouver de polys.*

Même problématique que l'énoncé précédent en plus complexe : quel que soit le tiroir, s'il existe une feuille dedans alors aucun polycopié ne sera dedans

∀t **(** (Tiroir(t) ∧ ∃f (Feuille(f)∧Dans(f,t))) ⇒ ¬∃p (Poly(p) ∧ Dans(p,t)) **)**

Exercice 3.15 — Interprétation et modèles ? (objectif 3.2.2)

On considère la fbf de la LP1 suivante $\phi \equiv \forall x\ \exists y\ Inf(x,y)$ avec $Inf(x,y)$ vrai si $x < y$.

1. valeur de vérité de la formule ϕ suivant le domaine d'interprétation D :

$\mathcal{D} = \Re$ (réels)	vrai	$\mathcal{D} = \{0,1\}$	faux
$\mathcal{D} = \varnothing$	faux	$\mathcal{D} = \{0\}$	faux

2. Un modèle possible de $\exists y\ \forall x\ \neg P(x,y)$ (parmi une infinité de solutions) est : D = {0} et Ip(P) : P(x,y) est vrai si x est différent de y.