
CC1 Analyse 4 , durée : 2h. Barème sur 24 pts.

Les calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée.

Exercice 1. Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[-1, 1]$ par

$$f_n(x) = (1 - x^2)^n.$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n) .
2. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $[-1, 1]/[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.
3. Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[-1, 1]$.
4. A-t-on la convergence uniforme de (f_n) sur $]0, 1[$?

Exercice 2. Soit la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x e^{-n^2 x}.$$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .

On note S sa fonction somme.

2. Pour $n \geq 1$, étudier les variations de f_n sur \mathbb{R}_+ .
3. Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3. Etudier la nature des séries numériques :

$$(a) \sum_{n \geq 0} \frac{e^{in^3} + n}{1 + in^3}, \quad (b) \sum_{n \geq 0} e^{n(-\frac{1}{2} + 2i)} \quad \text{et} \quad (c) \sum_{n \geq 2} \frac{e^{2in}}{\ln n}.$$

Tournez, SVP

Exercice 4. Soit (f_n) la suite de fonctions continues définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 x^2 (1 - nx) & \text{si } x \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1] \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite (f_n) .
2. Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$. Que peut-on en déduire comme résultat sur la convergence uniforme de (f_n) ?
3. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[a, 1]$ pour $a \in]0, 1[$.
4. A-t-on

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^1 f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f_n(t) dt \quad ?$$

Exercice 5. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ où

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1 + n^2 x)}, \quad x \geq 0.$$

1. Montrer que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
On note S sa fonction somme.
 2. Pour $n \geq 1$, étudier les variations de f_n sur \mathbb{R}_+ .
En déduire que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
 3. Montrer que la fonction somme S est dérivable sur \mathbb{R}_+^* .
 4. On s'intéresse maintenant au comportement de S en $+\infty$.
On pose $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$. Montrer que pour $x > 0$,
- $$S(x) - \alpha = - \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^3(1 + n^2 x)}.$$
5. En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \alpha$.