Chapitre 2

Formes bilinéaires

Sommaire

Dans tout ce chapitre, sauf mention du contraire, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On note $\mathcal{A}(E^2,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de E^2 vers $\mathbb{K}$. Si $f \in \mathcal{A}(E^2,\mathbb{K})$ et $(u,v) \in E^2$, on notera

$$f(u,v) = f((u,v)).$$

2.1 Généralités

Définition 17. Une forme bilinéaire sur E est une application $b : E^2 \to \mathbb{K}$ qui est linéaire en chacune de ses variables, c'est-à-dire que, pour tout triplet $(u,v,w) \in E$ et tout $\alpha \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned} b(\alpha u + v, w) &= \alpha b(u,w) + b(v,w) \quad \text{(linéarité en la première variable)},\\ b(w, \alpha u + v) &= \alpha b(w,u) + b(w,v) \quad \text{(linéarité en la deuxième variable)}. \end{aligned}$$

On note $B(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires sur E. Une forme linéaire définit donc deux applications linéaires de E vers E^* de la manière suivante. A tout $u \in E$, on peut associer la forme linéaire $b(u,\cdot) \in E^*$ (resp. $b(\cdot,u) \in E^*$) définie par

$$b(u,\cdot) : v \mapsto b(u,v) \quad (\text{resp. } b(\cdot,u) : v \mapsto b(v,u))$$

et, inversément, si $\Phi : E \to E^*$ est une application linéaire, on peut lui associer la forme bilinéaire $\varphi(u,v) = (\Phi(u))(v)$. Ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre.

Proposition 18. *L'ensemble $B(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(E^2,\mathbb{K})$.*

Nous verrons plus loin le calcul de $\dim B(E)$ (voir la section 2.2).

Démonstration. 1. L'application nulle O de E^2 vers $\mathbb{K}$ est clairement bilinéaire donc $O \in B(E)$.

2. Si $b_1, b_2 \in B(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda b_1 + b_2 \in B(E)$: la vérification est facile.

□

Remarque. 1. Si $b \in B(E)$, alors, pour tout $u \in E$, on a $b(0_E, u) = b(u, 0_E) = 0$.

2. Si $b \in B(E)$, $\mathrm{Im}(b) = \{b(u,v),\ (u,v) \in E^2\}$ est une partie de $\mathbb{K}$ stable par multiplication par un scalaire (si $\alpha = b(u,v)$, $\lambda\alpha = b(\lambda u, v) \in \mathrm{Im}(b)$). Deux cas de figure se présentent. Soit $\mathrm{Im}(b) = \{0\}$ et dans ce cas $b = O$. Soit $\mathrm{Im}(b) \neq \{0\}$, on voit alors que $\mathrm{Im}(b) = \mathbb{K}$.

Donnons maintenant quelques exemples de formes bilinéaires :

1. Exemple fondamental : Si $\varphi, \psi \in E^*$, alors l'application
$$\begin{array}{cccc} \varphi \otimes \psi : & E^2 & \to & \mathbb{K} \\ & (u,v) & \mapsto & \varphi(u)\psi(v) \end{array}$$
est une forme bilinéaire sur E (lire φ tensoriel ψ).

2. Dans $E = \mathbb{R}^2$ l'application définie par $b((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$ est une forme bilinéaire (c'est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$). De même sur $E = \mathbb{R}^3$, l'application
$$b((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$
est une forme bilinéaire. Mais il en existe bien d'autres. Par exemple
$$b((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = 3x_1y_2 - 8y_1y_2 + 4z_1y_2 - 7x_1z_2$$
est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$. En utilisant le premier exemple, cette dernière forme bilinéaire peut se noter $b = 3e_1^* \otimes e_2^* - 8e_2^* \otimes e_2^* + 4e_3^* \otimes e_2^* - 7e_1^* \otimes e_3^*$.

3. Dans $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $b(P,Q) = P(0)Q'(1) + 3P'(0)Q(1)$ est une forme bilinéaire. On a vu que les applications $\varphi_\alpha : P \mapsto P(\alpha)$ et $\psi_\alpha : P \mapsto P'(\alpha)$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}[X]$ et on peut écrire $b = \varphi_0 \otimes \psi_1 + 3\psi_0 \otimes \varphi_1$.

4. Si $E = M_n(\mathbb{K})$, l'application $b(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$ est une forme bilinéaire sur E. De même, $b(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$

5. Si $E = C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'application b de E^2 vers $\mathbb{R}$ définie par $b(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire sur E. On pourrait considérer aussi, par exemple $b(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t^2)dt$.

2.2 Bases standards de $B(E)$

Soit $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Notons, comme dans le chapitre précédent, $\mathcal{B}^* = (e_1^*,\dots,e_n^*)$ sa base duale. Rappelons ici la formule (1.3.1) :
$$\forall u \in E,\ u = \sum_{i=1}^n e_i^*(u)e_i.$$
Soit $b \in B(E)$, pour toute paire de vecteurs $(u,v) \in E^2$, on a, en utilisant la bilinéarité de b,
$$b(u,v) = b\left(\sum_{i=1}^n e_i^*(u)e_i, v\right) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u)b(e_i,v) = \sum_{i=1}^n e_i^*(u)b\left(e_i, \sum_{j=1}^n e_j^*(v)e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n e_i^*(u)e_j^*(v)b(e_i,e_j). \tag{2.2.1}$$
En utilisant la notation de l'exemple fondamental de la section précédente, nous avons donc montré que
$$b = \sum_{i,j=1}^n b(e_i,e_j)e_i^* \otimes e_j^*, \tag{2.2.2}$$
autrement dit, les $e_i^* \otimes e_j^*$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, forment une famille génératrice de $B(E)$. Montrons maintenant que cette famille est libre. Supposons donc que nous avons des scalaires $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ tels que $b = \displaystyle\sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} e_i^* \otimes e_j^* = O$. Nous avons en particulier, pour toute paire $(k,l) \in \{1,\dots,n\}^2$,
$$0 = b(e_k,e_l) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}e_i^*(e_k)e_j^*(e_l) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij}\delta_{ik}\delta_{jl} = \lambda_{kl}.$$
Donc tous les λ_{kl} sont nuls, ce qui montre que la famille des $e_i^* \otimes e_j^*$ est une famille libre de $B(E)$. En résumé, nous avons montré le théorème suivant :

Théorème 19. *$B(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n^2 dont une base est donnée par les $e_i^* \otimes e_j^*$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$.*

Remarquons ici que nous avons encore mieux. La formule (2.2.2) montre que la base duale des $e_i^* \otimes e_j^*$ est formée par les $b \mapsto b(e_i, e_j)$. Revenons maintenant sur l'écriture (2.2.1). Notons U et V les matrices colonnes des coordonnées des vecteurs u et v dans la base $\mathcal{B}$:

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^*(u) \\ e_2^*(u) \\ \vdots \\ e_n^*(u) \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1^*(v) \\ e_2^*(v) \\ \vdots \\ e_n^*(v) \end{pmatrix}.$$

Notons $B = (b(e_i, e_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. On a alors

$$b(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} e_i^*(u) e_j^*(v) b(e_i, e_j) = {}^tUBV \tag{2.2.3}$$

C'est l'*écriture matricielle* de $b(u, v)$ dans la base $\mathcal{B}$.

De la preuve du théorème 19 découle le résultat suivant :

Théorème 20. *Soit $\mathcal{B}$ une base de E. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : B(E) \to M_n(\mathbb{K})$ qui, à une forme bilinéaire, associe sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Voyons maintenant comment effectuer un changement de base. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$:

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_E) = (e_i^*(e_j'))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Pour tout $(u, v) \in E^2$, notons respectivement U et U', V et V' les matrices colonnes des coordonnées respectivement de u et ce v dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. On a $U = PU'$ et $V = PV'$. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$. On a

$${}^tU'M'V' = b(u, v) {}^tUMV = {}^t(PU')MPV' = {}^tU' \, {}^tPMPV'.$$

Comme ceci est vrai pour tout choix de (u, v), autrement dit pour tout choix de (U', V'), on a $M' = {}^tPMP$:

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b) = {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) P.} \tag{2.2.4}$$

C'est la *formule de changement de base pour les formes bilinéaires*. On dit alors que les matrices M et M' sont *congruentes*.

Puisque P est inversible, ${}^tP$ l'est également ($\det({}^tP) = \det(P)$). Les deux matrices M et M' sont donc équivalentes : elles ont même rang. Ceci justifie la définition suivante :

Définition 21. On appelle *rang* de $b \in B(E)$ le rang de sa matrice représentative dans une base quelconque de E : $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(b))$ avec $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.

Exemple. • Reprenons la forme bilinéaire $b((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)) = 3x_1y_2 - 8y_1y_2 + 4z_1y_2 - 7x_1z_2$. Si $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = e_1 + e_3$, $u_2 = e_1 - e_2$, $u_3 = e_2 - e_3$, la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = {}^tP \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(b) P = \begin{pmatrix} -7 & -7 & 14 \\ -7 & -11 & 18 \\ 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

On vérifie par exemple

$$b(u_2, u_3) = b((1, -1, 0), (0, 1, -1)) = 3 \times 1 \times 1 - 8 \times (-1) \times 1 + 4 \times 0 \times 1 - 7 \times 1 \times (-1) = 3 + 8 + 7 = 18,$$

ce qui correspond bien au coefficient à l'intersection de la deuxième ligne et de la troisième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$. De l'écriture dans la base $\mathcal{B}_0$ de b, on voit tout de suite que $\mathrm{rg}(b) = 2$.

- Considérons la forme bilinéaire $b(P,Q)=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt$ sur $E=\mathbb{R}_2[X]$. Alors, si $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2)$ désigne la base canonique de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(b)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2/3\\ 0 & 2/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 2/5\end{pmatrix}$$

2.3 Formes bilinéaires symétriques et antisymétriques

2.3.1 Définitions et premières propriétés

Définition 22. Soit $b\in B(E)$. On dit que

1. b est *symétrique* si $\forall(u,v)\in E^2$, $b(u,v)=b(v,u)$.
2. b est *antisymétrique* ou alternée si $\forall(u,v)\in E^2$, $b(u,v)=-b(v,u)$.

On note $S(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et $A(E)$ l'ensemble des formes bilinéaires alternées.

Remarque. 1. Si $b\in A(E)$, on a, pour tout $u\in E$, $b(u,u)=-b(u,u)$ donc $b(u,u)=0$[1]. Inversément, si on a, pour tout $u\in E$, $b(u,u)=0$ (autrement dit b est nulle dès lors que ses 2 arguments sont égaux) on a

$$0=b(u+v,u+v)=b(u,u)+b(u,v)+b(v,u)+b(v,v)=b(u,v)+b(v,u)$$

donc $b(u,v)=-b(v,u)$.

2. Pour prouver qu'une application $b\in\mathcal{A}(E^2,\mathbb{K})$ est bilinéaire symétrique (resp. antisymétrique), il suffit de prouver que
   - La symétrie (resp. l'antisymétrie) de b : $\forall(u,v)\in E^2$, $b(u,v)=b(v,u)$ (resp. $b(u,v)=-b(v,u)$),
   - la linéarité par rapport à l'une ou l'autre des variables.

Théorème 23. *$S(E)$ et $A(E)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $B(E)$ et*

$$B(E)=S(E)\oplus A(E).$$

De plus, $\dim(S(E))=\frac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim(A(E))=\frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration. Soit $\sigma:E^2\to E^2$, l'application linéaire définie par $\sigma(u,v)=(v,u)$. σ est une symétrie (i.e. $\sigma^2=\mathrm{Id}$). Soit $\Sigma:B(E)\to B(E)$ l'endomorphisme donné par $\Sigma(b)=b\circ\sigma$, autrement dit $\Sigma(b)$ est la forme bilinéaire définie par

$$\Sigma(b)(u,v)=(b\circ\sigma)(u,v)=b(\sigma(u,v))=b((v,u))=b(v,u).$$

On a alors, pour tout $b\in B(E)$, que $\Sigma^2(b)=\Sigma(\Sigma(b))=\Sigma(b\circ\sigma)=(b\circ\sigma)\circ\sigma=b\circ\sigma^2=b\circ\mathrm{Id}=b$. donc Σ est une symétrie. Σ est diagonalisable et ses valeurs propres sont ±1. Donc

$$S(E)=\{b\in B(E),\Sigma(b)=b\},$$
$$A(E)=\{b\in B(E),\Sigma(b)=-b\}$$

sont les sous-espaces propres de Σ, donc des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $B(E)$.

Nous avons vu comment associer à une forme bilinéaire une matrice (théorème 20) dans une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ donnée. La matrice $M=(m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ d'une forme bilinéaire est la matrice des $m_{ij}=b(e_i,e_j)$. M est symétrique ssi $b(e_i,e_j)=b(e_j,e_i)$ pour toute paire (i,j) autrement dit si b est symétrique[2]. De même M est antisymétrique ssi b est antisymétrique. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est

[1] En toute rigueur, on a $2b(u,u)=0$ donc $b(u,u)=0$ ou... $2=0$. Ce second cas se produit sur certains corps, dits de caractéristique 2, comme par exemple $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Le lecteur pointilleux devra donc ajouter, dans la plupart des énoncés, que le corps $\mathbb{K}$ doit être de caractéristique différente de 2.

[2] Il s'agit ici d'un exercice : pour que b soit symétrique (resp. antisymétrique), il suffit que pour toute paire (i,j), on ait $b(e_i,e_j)=b(e_j,e_i)$ (resp. $b(e_i,e_j)=b(e_j,e_i)$)

donc un envoie donc bijectivement $S(E)$ sur $S_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n) et $A(E)$ sur $A_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n). On en déduit

$$\dim S(E) = \dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

De manière plus conceptuelle, on peut remarquer que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Sigma(b)) = (\Sigma(b)(e_i, e_j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = (b(e_j, e_i))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b),$$

donc si b est un vecteur propre pour Σ : $\Sigma(b) = \lambda b$, on a

$$\lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Sigma(b)) = {}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b).$$

Donc ${}^t\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ est un vecteur propre pour la même valeur propre λ de l'application transposée $M \mapsto {}^tM$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S(E)) \subset S_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A(E)) \subset A_n(\mathbb{K})$. Comme $b \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b)$ est un isomorphisme, on a

$$\dim(S(E)) + \dim(A(E)) = \dim(B(E)) = \dim(M_n(\mathbb{K})) = \dim(S_n(\mathbb{K})) + \dim(A_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Or, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(S(E)) \subset S_n(\mathbb{K})$, on a $\dim(S(E)) \leqslant \dim(S_n(\mathbb{K}))$, et, comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(A(E)) \subset A_n(\mathbb{K})$, on a $\dim(A(E)) \leqslant \dim(A_n(\mathbb{K}))$. On doit donc avoir égalité :

$$\dim S(E) = \dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim A(E) = \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

2.3.2 Formes quadratiques

Définition 24. On appelle *forme quadratique* Φ sur E toute application de E dans $\mathbb{K}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire φ (sur E) telle que $\forall u \in E,\ \Phi(u) = \varphi(u, u)$.

Proposition 25. *Si Φ est une forme quadratique sur E, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que $\forall u \in E,\ \Phi(u) = \varphi(u, u)$. φ est donnée par* l'identité de polarisation *suivante :*

$$\forall (u, v) \in E^2,\ \varphi(u, v) = \frac{1}{2}\left(\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)\right).$$

φ est alors appelée la forme polaire *de Φ.*

Démonstration. Par définition de Φ, il existe une forme bilinéaire φ_0 telle que $\forall u \in E, \Phi(u) = \varphi_0(u, u)$. Notons $\varphi_0 = \varphi_s + \varphi_a$, $\varphi_s \in S(E)$, $\varphi_a \in A(E)$ la décomposition de φ_0 en parties symétrique et antisymétrique. On a alors, pour tout $u \in E$,

$$\Phi(u) = \varphi_0(u, u) = \varphi_s(u, u) + \varphi_a(u, u) = \varphi_s(u, u).$$

(voir la remarque page 20 sur les formes bilinéaires antisymétriques : on a $\varphi_a(u, u) = 0$). La forme $\varphi = \varphi_s$ est donc une forme bilinéaire symétrique telle que $\forall u \in E,\ \Phi(u) = \varphi(u, u)$, ce qui montre l'existence d'une telle forme. Pour l'unicité, montrons la formule de polarisation. Si $(u, v) \in E^2$, on a

$$\begin{aligned}\Phi(u + v) &= \varphi(u + v, u + v)\\ &= \varphi(u, u + v) + \varphi(v, u + v)\\ &= \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v)\\ &= \Phi(u) + 2\varphi(u, v) + \Phi(v),\end{aligned}$$

où, pour passer de la troisième ligne à la quatrième, nous avons utilisé le fait que φ est symétrique. Nous obtenons alors l'identité de polarisation $\varphi(u, v) = \frac{1}{2}\left(\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)\right)$. Remarquons que cette formule donne $\varphi(u, v)$ en fonction de $\Phi(u + v)$, $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$. Donc si Φ est connue, φ est donnée sans ambiguïté, ce qui démontre l'unicité de φ. □

Exemple. Reprenons la forme bilinéaire définie dans l'exemple page 19 : $b((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = 3x_1y_2 - 8y_1y_2 + 4z_1y_2 - 7x_1z_2$ sur l'espace $E = \mathbb{R}^3$. Remarquons que b n'est pas symétrique. La forme quadratique associée est $\Phi((x,y,z)) = 3xy - 8y^2 + 4zy - 7xz$. On peut alors calculer la forme polaire φ de Φ :

$$\begin{aligned}
&\varphi((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))\\
&\quad= \frac{1}{2}\left[\Phi((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) - \Phi((x_1,y_1,z_1)) - \Phi((x_2,y_2,z_2))\right]\\
&\quad= \frac{1}{2}\left[\Phi((x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)) - \Phi((x_1,y_1,z_1)) - \Phi((x_2,y_2,z_2))\right]\\
&\quad= \frac{1}{2}\big[3(x_1+x_2)(y_1+y_2) - 8(y_1+y_2)^2 + 4(z_1+z_2)(y_1+y_2) - 7(x_1+x_2)(z_1+z_2)\\
&\qquad\qquad -\Phi((x_1,y_1,z_1)) - \Phi((x_2,y_2,z_2))\big]\\
&\quad= \frac{1}{2}\big[3(x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2) - 8(y_1^2+2y_1y_2+y_2^2)\\
&\qquad\qquad +4(y_1z_1+y_1z_2+y_2z_1+z_1z_2) - 7(x_1z_1+x_1z_2+x_2z_1+x_2z_2)\\
&\qquad\qquad -(3x_1y_1-8y_1^2+4y_1z_1-7x_1z_1) - (3x_2y_2-8y_2^2+4y_2z_2-7x_2z_2)\big]\\
&\quad= \frac{1}{2}\left[3(x_1y_2+x_2y_1) - 16y_1y_2 + 4(y_1z_2+y_2z_1) - 7(x_1z_2+x_2z_1)\right]\\
&\quad= \frac{3}{2}(x_1y_2+x_2y_1) - 8y_1y_2 + 2(y_1z_2+y_2z_1) - \frac{7}{2}(x_1z_2+x_2z_1),
\end{aligned}$$

et on constate bien que φ est symétrique.

Remarquons, sur cet exemple en particulier, qu'une forme quadratique Φ sur $\mathbb{K}^n$ est un polynôme homogène de degré 2 en n variables. Si φ est la forme polaire de Φ, on a

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1,\dots,x_n)) &= \varphi((x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n)) = \varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n x_je_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^n x_j\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, e_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\varphi(e_i,e_j),
\end{aligned}$$

donc $\Phi((x_1,\dots,x_n))$ ne fait intervenir que des termes de degré 2 en l'ensemble des variables $x_1,\dots,x_n$. On peut encore réduire l'écriture de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1,\dots,x_n)) &= \sum_{i,j=1}^n x_ix_j\varphi(e_i,e_j) = \sum_{i=j} x_ix_j\varphi(e_i,e_j) + \sum_{i\neq j} x_ix_j\varphi(e_i,e_j)\\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2\varphi(e_i,e_i) + \sum_{i<j} x_ix_j\varphi(e_i,e_j) + \sum_{j<i} x_jx_i\varphi(e_j,e_i)\\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2\varphi(e_i,e_i) + 2\sum_{i<j} x_ix_j\varphi(e_i,e_j). \qquad (2.3.1)
\end{aligned}$$

Remarquons que c'est souvent sous cette forme que Φ sera donnée. Il est possible alors de lire directement la matrice de Φ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. La règle est alors la suivante. Supposons que nous avons écrit

$$\Phi((x_1,x_2,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant 1<j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j. \qquad (2.3.2)$$

En comparant (2.3.1) et (2.3.2), on voit que $a_{ii} = \varphi(e_i,e_i)$ pour tout i alors que $a_{ij} = 2\varphi(e_i,e_j)$ si $i\neq j$. On procède alors comme suit :

- Les "carrés" $x_1^2,\dots,x_n^2$ correspondent aux termes diagonaux de $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\Phi)$. On reporte le coefficient a_{ii} de x_i^2 sur le i-ème terme diagonal.
- Les "termes mixtes" $a_{ij} = x_ix_j$, $i\neq j$, correspondent aux coefficients hors diagonaux. On reporte la moitié du coefficient a_{ij} en position (i,j) et en position (j,i).

Donnons tout de suite un exemple. Soit

$$\begin{aligned}
\Phi((x_1,x_2,x_3,x_4)) = {}&3x_1^2 - 4x_2^2 + x_3^2 - 8x_4^2\\
&+ 24x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_4 + 10x_3x_4.
\end{aligned}$$

Pour trouver la matrice M de Φ, on écrit tout d'abord les termes diagonaux (coefficients devant les carrés) :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & -4 & & \\ & & 1 & \\ & & & -8 \end{pmatrix},$$

puis les termes hors diagonaux, en n'oubliant pas de les diviser par 2 :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -1 & 0 \\ 12 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

2.3.3 Réduction des formes bilinéaires symétriques et des formes quadratiques

Théorème 26 (Réduction de Gauss forme 1)**.** *Soit Φ une forme quadratique. Il existe k, $k \leqslant n$, formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in E^*$ linéairement indépendentes et des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}^*$ tels que*

$$\Phi((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\varphi(x_1, \ldots, x_n))^2.$$

De plus

- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tous les λ_i peuvent être pris égaux à 1.*
- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tous les λ_i peuvent être pris égaux à $+1$ ou -1.*

Démonstration. Nous allons donner une preuve algorithmique de l'existence de cette écriture, c'est-à-dire une construction qui peut être mise en œuvre dans la pratique (sur un ordinateur ou à la main). Une seconde preuve, plus conceptuelle, sera donnée après le théorème 27.

Nous allons procéder par récurrence forte sur le nombre n de variables $x_1, \ldots, x_n$ qui apparaissent dans Φ :

- Si $n = 0$, il n'y a rien à faire, Φ est somme de zéro forme linéaire.
- Si $n > 0$, notons, comme dans (2.3.2),

$$\Phi((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j.$$

Nous avons deux cas à distinguer :

– Premier cas : Soit il existe i tel que $a_{ii} \neq 0$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $a_{nn} \neq 0$. Nous allons alors regrouper tous les termes contenant x_n :

$$\begin{aligned} \Phi((x_1, \ldots, x_n)) &= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} a_{ij} x_i x_j \right)}_{:= \Phi'(x_1, \ldots, x_{n-1})} + \left(a_{nn} x_n^2 + \sum_{1 \leqslant i < n} a_{in} x_i x_n \right) \\ &= \Phi'(x_1, \ldots, x_{n-1}) + a_{nn} \left(x_n^2 + 2x_n \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right) \\ &= \Phi'(x_1, \ldots, x_{n-1}) + a_{nn} \left[\left(x_n + \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right)^2 - \left(\sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right)^2 \right] \\ &= a_{nn} \underbrace{\left(x_n + \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right)^2}_{:= \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)} + \underbrace{\Phi'(x_1, \ldots, x_{n-1}) - a_{nn} \left(\sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right)^2}_{:= \widetilde{\Phi}((x_1, \ldots, x_{n-1}))}. \end{aligned}$$

L'idée a été ici d'écrire que $x_n^2 + 2x_n \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i$ est le "début" du carré parfait $\left(x_n + \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i \right)^2$.

Remarquons que $\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = x_n + \sum_{1 \leqslant i < n} \frac{a_{in}}{2a_{nn}} x_i$ est une forme linéaire sur E et que

$\widetilde{\Phi}((x_1,\ldots,x_{n-1})) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1} a_{ij}x_ix_j - a_{nn}\left(\sum_{1\leqslant i<n}\frac{a_{in}}{2a_{nn}}x_i\right)^2$ est une forme quadratique sur E ne faisant plus intervenir la variable x_n. En utilisant l'hypothèse de récurrence forte, nous savons que $\widetilde{\Phi}$ se décompose en une somme d'au plus $n-1$ carrés de formes linéaires :

$$\widetilde{\Phi}((x_1,\ldots,x_{n-1})) = \sum_{i=2}^{k}\lambda_i(\varphi_i(x_1,\ldots,x_{n-1}))^2$$

avec $k\leqslant n$. Ceci achève la construction dans le premier cas car

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n)) = a_{nn}(\varphi_1(x_1,\ldots,x_n))^2 + \sum_{i=2}^{k}\lambda_i(\varphi_i(x_1,\ldots,x_{n-1}))^2$$

est une somme d'au plus n carrés de formes quadratiques.

– Second cas : Si, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $a_{ii}=0$. Nous allons supposer qu'au moins un des coefficients a_{ij} est non nul (sinon Φ est la forme nulle et le théorème est démontré). Sans perte de généralité là encore, nous pouvons supposer que $a_{n-1,n}\neq 0$. Mettons, comme dans le premier cas, tous les termes dépendants de x_n et de x_{n-1} de côté :

$$\begin{aligned}
&\Phi((x_1,\ldots,x_n))\\
&= \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-2} a_{ij}x_ix_j}_{:=\Phi''(x_1,\ldots,x_{n-2})} + a_{n-1,n}\left(x_nx_{n-1} + \sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_ix_n + \sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_ix_{n-1}\right)\\
&= \Phi''(x_1,\ldots,x_{n-2})\\
&\quad + a_{n-1,n}\left[\left(x_{n-1}+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\left(x_n+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i\right) - \left(\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\left(\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\right]\\
&= \underbrace{\Phi''(x_1,\ldots,x_{n-2}) - a_{n-1,n}\left(\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\left(\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i\right)}_{:=\overline{\Phi}((x_1,\ldots,x_{n-2}))}\\
&\quad + a_{n-1,n}\left(x_{n-1}+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\left(x_n+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i\right).
\end{aligned}$$

L'astuce que nous avons utilisée ici a été de voir que les termes dans la parenthèse de la première ligne sont de la forme $x_nx_{n-1}+Ax_n+Bx_{n-1}$ avec $A=\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i$ et $B=\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i$. Nous avons alors écrit, pour passer à la seconde ligne

$$x_nx_{n-1}+Ax_n+Bx_{n-1} = (x_n+B)(x_{n-1}+A)-AB.$$

Nous nous retrouvons maintenant avec l'égailté suivante :

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n)) = \overline{\Phi}((x_1,\ldots,x_{n-2})) + a_{n-1,n}\left(x_{n-1}+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i\right)\left(x_n+\sum_{i\leqslant n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i\right)$$

et le second terme est un produit de deux formes linéaires $\psi_1(x_1,\ldots,x_n),\psi_2(x_1,\ldots,x_n)$ avec $\psi_1(x_1,\ldots,x_n) = x_n+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{i,n-1}}{a_{n-1,n}}x_i$ et $\psi_2(x_1,\ldots,x_n) = x_n+\sum_{i=1}^{n-2}\frac{a_{in}}{a_{n-1,n}}x_i$. Remarquons alors que

$$4\psi_1\psi_2 = (\psi_1+\psi_2)^2-(\psi_1\psi_2)^2$$

(où nous avons enlever les arguments $(x_1,\ldots,x_n)$ pour plus de clarté). On peut donc écrire

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n)) = \overline{\Phi}((x_1,\ldots,x_{n-2})) + a_{n-1,n}(\varphi_1)^2 - a_{n-1,n}(\varphi_2)^2$$

avec $\varphi_1=\frac{\psi_1+\psi_2}{2}$ et $\varphi_2=\frac{\psi_1-\psi_2}{2}$. Par récurrence, comme $\overline{\Phi}$ ne dépend que de $n-2$ variables, elle est somme d'au plus $n-2$ carrés de formes linéaires :

$$\overline{\Phi}(x_1,\ldots,x_{n-2}) = \sum_{i=3}^{k}\lambda_i(\varphi_i(x_1,\ldots,x_{n-2})^2$$

donc

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n)) = a_{n-1,n}\left(\varphi_1(x_1,\ldots,x_{n-2})\right)^2 - a_{n-1,n}\left(\varphi_2(x_1,\ldots,x_{n-2})\right)^2 + \sum_{i=3}^{k}\lambda_i\left(\varphi_i(x_1,\ldots,x_{n-2})\right)^2$$

est somme d'au plus n carrés de formes linéaires.

Revenons un peu sur la construction que nous venons de voir :

- Si l'on se trouve dans le premier cas, nous voyons que $\Phi = \lambda_1(\varphi_1)^2 + \lambda_2(\varphi_2)^2 + \cdots + \lambda_k(\varphi_k)^2$ avec φ_1 dépendant de x_n alors que les φ_i, $i \geqslant 2$ n'en dépendent pas. φ_1 est donc linéairement indépendant des autres φ_i, $i \geqslant 2$.
- Si l'on se trouve dans le second cas, ψ_1 et ψ_2 dépendent de x_n et x_{n-1} alors que les φ_i, $i \geqslant 3$ n'en dépendent pas. ψ_1 et ψ_2 sont donc linéairement indépendants des φ_i, $i \geqslant 3$. Comme ψ_1 dépend de x_n et ψ_2 n'en dépend pas, ψ_1 et ψ_2 sont linéairement indépendants. Il en va donc de même pour φ_1 et φ_2.

Par récurrence, nous voyons que tous les φ_i qui apparaissent dans la d{ecomposition de Φ que nous avons obtenue sont linéairement indépendants (on a un échelonnement, du moins lorsqu'on n'a pas rencontré le second cas), ce qui démontre que les φ_i sont linéairement indépendants.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,[3] nous pouvons écrire

$$\Phi((x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\varphi(x_1,\ldots,x_n))^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\sqrt{\lambda_i}\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\left(\widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)\right)^2,$$

avec $\sqrt{\lambda_i}$ une racine carrée de λ_i et $\widetilde{\varphi}_i = \sqrt{\lambda_i}\varphi_i$ pour tout $i \in \{1,\ldots,k\}$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, quitte à réordonner les φ_i et les λ_i, nous pouvons supposer que, pour un certain $k_1 \leqslant k$, on a $\lambda_i > 0$ si $i \leqslant k_1$ et $\lambda_i < 0$ si $i > k_1$. Posons $\mu_i = |\lambda_i|$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}\Phi((x_1,\ldots,x_n)) &= \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(\varphi(x_1,\ldots,x_n))^2 = \sum_{i\leqslant k_1}^{k_1}\mu_i(\varphi(x_1,\ldots,x_n))^2 - \sum_{i>k_1}\mu_i(\varphi(x_1,\ldots,x_n))^2\\ &= \sum_{i\leqslant k_1}^{k_1}\left(\sqrt{\mu_i}\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right)^2 - \sum_{i>k_1}\left(\sqrt{\mu_i}\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right)^2\\ &= \sum_{i\leqslant k_1}^{k_1}\left(\widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)\right)^2 - \sum_{i>k_1}\left(\widetilde{\varphi}(x_1,\ldots,x_n)\right)^2\end{aligned}$$

avec $\widetilde{\varphi}_i = \sqrt{\mu_i}\varphi_i$.

Ce qui montre le résultat annoncé dans les cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. □

Donnons tout de suite un exemple de réduction de Gauss dans la pratique. Nous nous plaçons ici sur $E = \mathbb{R}^5$. Considérons la forme quadratique Φ suivante :

$$\begin{aligned}&\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\ &\quad = x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 - 6x_1x_4 - 12x_2x_4 - 4x_3x_4 + 9x_4^2 + 4x_2x_5 + 10x_3x_5 + 2x_4x_5 - 2x_5^2.\end{aligned}$$

Regroupons les termes en x_1 :

$$\begin{aligned}&\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\ &\quad = (x_1^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_4) + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 - 12x_2x_4 - 4x_3x_4 + 9x_4^2 + 4x_2x_5 + 10x_3x_5 + 2x_4x_5 - 2x_5^2\\ &\quad = (x_1 + 2x_2 - 3x_4)^2 - (2x_2 + 3x_4)^2\\ &\qquad\quad + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 - 12x_2x_4 - 4x_3x_4 + 9x_4^2 + 4x_2x_5 + 10x_3x_5 + 2x_4x_5 - 2x_5^2\\ &\quad = (x_1 + 2x_2 - 3x_4)^2 - 2x_2^2 - 4x_2x_3 - 2x_3^2 - 4x_3x_4 + 4x_2x_5 + 10x_3x_5 + 2x_4x_5 - 2x_5^2,\end{aligned}$$

[3] plus généralement si tout élément $x \in \mathbb{K}$ admet une racine carrée dans $\mathbb{K}$, on dit alors que $\mathbb{K}$ est *quadratiquement clos*

où, pour passer de la deuxième ligne à la troisième, nous avons développé le carré $(2x_2+3x_4)^2$ et réduit. Recommençons maintenant avec x_2 :

$$\begin{aligned}
&\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\\
&\quad= (x_1+2x_2-3x_4)^2-2(x_2^2+2x_2x_3-2x_2x_5)-2x_3^2-4x_3x_4+10x_3x_5+2x_4x_5-2x_5^2\\
&\quad= (x_1+2x_2-3x_4)^2-2\left[(x_2+x_3-x_5)^2-(x_3-x_5)^2\right]-2x_3^2-4x_3x_4+10x_3x_5+2x_4x_5-2x_5^2\\
&\quad= (x_1+2x_2-3x_4)^2-2(x_2+x_3-x_5)^2-4x_3x_4+6x_3x_5+2x_4x_5.
\end{aligned}$$

Nous voyons que, dans les termes restants, il n'y a plus de "carré" (i.e. aucun terme en x_3^2, x_4^2 ou x_5^2. Nous sommes donc dans le second cas de la réduction de Gauss. Ecrivons alors

$$\begin{aligned}
-4x_3x_4+6x_3x_5+2x_4x_5 &= -4\left[x_3x_4-\frac{3}{2}x_3x_5-\frac{1}{2}x_4x_5\right]\\
&= -4\left[\left(x_3-\frac{1}{2}x_5\right)\left(x_4-\frac{3}{2}x_5\right)-\left(\frac{1}{2}x_5\right)\left(\frac{3}{2}x_5\right)\right]\\
&= -\left[4\left(x_3-\frac{1}{2}x_5\right)\left(x_4-\frac{3}{2}x_5\right)-3x_5^2\right]\\
&= -\left[\left(\left(x_3-\frac{1}{2}x_5\right)+\left(x_4-\frac{3}{2}x_5\right)\right)^2-\left(\left(x_3-\frac{1}{2}x_5\right)-\left(x_4-\frac{3}{2}x_5\right)\right)^2-3x_5^2\right]\\
&= -\left((x_3+x_4-2x_5)^2-(x_3-x_4+x_5)^2-3x_5^2\right]\\
&= -(x_3+x_4-2x_5)^2+(x_3-x_4+x_5)^2+3x_5^2.
\end{aligned}$$

Nous avons finalement obtenu

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1+2x_2-3x_4)^2-2(x_2+x_3-x_5)^2-(x_3+x_4-2x_5)^2+(x_3-x_4+x_5)^2+3x_5^2,$$

ce qui montre que Φ est bien somme de carrés de formes linéaires :

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\varphi_1^2-2\varphi_2^2-\varphi_3^2+\varphi_4^2+3\varphi_5^2,$$

avec

$$\begin{cases}
\varphi_1(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1+2x_2-3x_4,\\
\varphi_2(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_2+x_3-x_5,\\
\varphi_3(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_3+x_4-2x_5,\\
\varphi_4(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_3-x_4+x_5,\\
\varphi_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_5.
\end{cases}$$

On peut maintenant faire "rentrer les coefficients dans les carrés" de la manière suivante :

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\varphi_1^2-(\sqrt{2}\varphi_2)^2-\varphi_3^2+\varphi_4^2+(\sqrt{3}\varphi_5)^2.$$

Donc, en posant $\widetilde{\varphi}_2=\sqrt{2}\varphi_2$ et $\widetilde{\varphi}_5=\sqrt{3}\varphi_5$, on a

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\varphi_1^2-(\widetilde{\varphi}_2)^2-\varphi_3^2+\varphi_4^2+(\widetilde{\varphi}_5)^2,$$

ce qui montre qeu Φ est somme de carrés de formes linéaires avec des coefficients ±1 devant.

Un corollaire important de cette réduction de Gauss est le suivant :

Théorème 27 (Réduction de Gauss forme 2)**.** *Soit Φ une forme quadratique sur E. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ est diagonale.*

Démonstration. Utilisons le théorème 26 : Il existe des formes linéaires linéairement indépendantes $\varphi_1,\dots,\varphi_k$ et des coefficients $\lambda_1,\dots,\lambda_k\in\mathbb{K}^*$, $k\leqslant n$, tels que $\Phi=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\varphi_i^2$. En utilisant le théorème de la base incomplète, on peut étendre la famille libre $(\varphi_1,\dots,\varphi_k)$ en une base $\mathcal{B}^*=(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ de E^*. Posons $\lambda_i=0$ pour tout $i\in\{k+1,\dots,n\}$. On a alors $\Phi=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i^2$. La forme bilinéaire φ associée à Φ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\varphi(u,v)=\frac{1}{2}\left[\Phi(u+v)-\Phi(u)-\Phi(v)\right] &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2}\left[(\varphi_i(u+v))^2-(\varphi_i(u))^2-(\varphi_i(v))^2\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{2}\left[(\varphi_i(u)+\varphi_i(v))^2-(\varphi_i(u))^2-(\varphi_i(v))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\varphi_i(u)\varphi_i(v).
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ désigne la base antéduale de la base $\mathcal{B}^*$: $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on a

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \varphi_l(e_i)\varphi_l(e_j) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \delta_{il}\delta_{jl} = \lambda_i \delta_{ij}.$$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = (\varphi(e_i, e_j))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est donc la matrice diagonale

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

□

Un point particulier à souligner ici est que si l'on a écrit, comme dans l'énoncé du théorème 26, $\Phi((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (\varphi(x_1, \ldots, x_n))^2$ avec $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, des formes linéaires linéairement indépendantes et les λ_i des scalaires tous non nuls, alors l'entier k correspond au rang de la forme bilinéaire φ associée. C'est en effet le rang de la matrice de Φ donnée dans la preuve du théorème 27.

Donnons maintenant une seconde preuve du théorème 27 plus conceptuelle :

Définition 28. Soit Φ une forme quadratique et φ la forme bilinéaire symétrique associée. On appelle noyau de Φ (ou de φ) le sous-espace vectoriel de E défini par

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \mathrm{Ker}\,(\varphi) = \{u \in E | \forall v \in E, \varphi(u, v) = 0\}.$$

Φ sera dite *non-dégénérée* si $\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \{0\}$.

Exercice 2.1. 1. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(\Phi)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. Montrer que l'ensemble des vecteurs isotropes de Φ, $\{u \in E, \Phi(u) = 0\}$, n'est pas, en généréral un sous-espace vectoriel de E (on pourra considérer par exemple la forme quadratique Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\Phi((x_1, x_2)) = (x_1)^2 - (x_2)^2$.

Une seconde preuve du théorème 27. Soit φ est la forme bilinéaire symétrique associée à Φ, nous cherchons une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E dans laquelle $\varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. Nous allons procéder par récurrence sur $\dim(E)$.

- Si $\dim(E) = 0$, il n'y a rien á démontrer.

- Si $\dim(E) > 0$, distingons 2 cas. Soit $\Phi = 0$ (et donc la forme bilinéaire symétrique $\varphi = 0$) et la matrice de Φ dans n'importe quelle base est la matrice nulle. En particulier, elle est symétrique. Sinon $\Phi \neq 0$ et il existe un vecteur e_1 tel que $\Phi(e_1) \neq 0$. Posons $F = \{x \in E, \varphi(e_1, x) = 0\}$. L'application $x \mapsto \varphi(e_1, x)$ est une forme linéaire non nulle ($\varphi(e_1, e_1) = \Phi(e_1) \neq 0$) donc F est un hyperplan de E et $e_1 \notin F$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}' = (e_2, \ldots, e_n)$ de F pour laquelle pour toute paire $(i,j) \in \{2, \ldots, n\}^2$, $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Par définition de F, on a également $\varphi(e_1, e_i) = 0$ dès lors que $i \neq 1$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.

Ceci achève la preuve du théorème 27. □

Remarquons qu'il n'y a pas unicité de l'écriture de Φ dans le théorème 26, tout comme il n'y a pas unicité de la base $\mathcal{B}$ dans le théorème 27. Nous avons cependant le résultat suivant dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Théorème 29 (Théorème d'inertie de Sylvester)**.** *Soit Φ une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Supposons données deux réductions de Φ :*

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \psi_i^2$$

avec tous les λ_i, μ_i égaux à $+1$, -1 ou 0 et $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$ deux bases (familles libres à n éléments) de E^*. Alors

- *Le nombre de λ_i égaux à $+1$ est égal au nombre de μ_i égaux à $+1$,*

- *Le nombre de λ_i égaux à -1 est égal au nombre de μ_i égaux à -1,*

- *Le nombre de λ_i égaux à 0 est égal au nombre de μ_i égaux à 0.*

Autrement dit, ces trois nombres ne dépendent pas de la réduction de Φ. On les note $n_+(\Phi)$, $n_-(\Phi)$ et $n_0(\Phi)$. On a $n = n_+(\Phi) + n_-(\Phi) + n_0(\Phi)$ et $\mathrm{rg}(\Phi) = n_+(\Phi) + n_-(\Phi)$. La paire $(n_+(\Phi), n_-(\Phi))$ est appelée signature *de Φ.*

Preuve du théorème 29. Nous avons vu (voir la preuve du theorème 27) que le nombre de λ_i (resp. μ_i) non nuls est égal au rang de la forme quadratique Φ. Donc le nombre de λ_i non nuls est égal à celui de μ_i non nuls.

Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ (resp. $(f_1, \ldots, f_n)$) la base antéduale de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ (resp. $(\psi_1, \ldots, \psi_n)$). De sorte que

$$i \neq j \Rightarrow \varphi(e_i, e_j) = 0 \text{ et } \varphi(f_i, f_j) = 0.$$

Notons

- $I_+ = \{i, \Phi(e_i) > 0\}$ (resp. $J_+ = \{i, \Phi(f_i) > 0\}$),
- $I_- = \{i, \Phi(e_i) < 0\}$ (resp. $J_- = \{i, \Phi(f_i) < 0\}$),
- et $I_0 = \{i, \Phi(e_i) = 0\}$ (resp. $J_0 = \{i, \Phi(f_i) = 0\}$).

De sorte que $I_+ \cup I_- \cup I_0 = J_+ \cup J_- \cup J_0 = \{1, \ldots, n\}$.

Nous savons que $\mathrm{Card}(I_+) + \mathrm{Card}(I_-) = \mathrm{rg}\,\Phi = \mathrm{Card}(J_+) + \mathrm{Card}(J_-)$. Nous allons voir que $\mathrm{Card}(J_-) \leqslant \mathrm{Card}(I_-)$. En échangeant les φ et les ψ, on aura $\mathrm{Card}(J_-) \geqslant \mathrm{Card}(I_-)$ d'où $\mathrm{Card}(J_-) = \mathrm{Card}(I_-)$.

Nous allons tout d'abord montrer que la famille $\mathcal{F}$ formée des e_i, $i \in I_+ \cup I_0$ et des f_j, $j \in J_-$ est libre.

Ecrivons donc qu'une certaine combinaison linéaire de ces vecteurs est nulle :

$$\sum_{i \in I_+ \cup I_0} \alpha_i e_i + \sum_{j \in J_-} \beta_j f_j = 0.$$

On a alors

$$\Phi\left(\sum_{j \in J_-} \beta_j f_j\right) = \Phi\left(-\sum_{i \in I_+ \cup I_0} \alpha_i e_i\right) = \Phi\left(\sum_{i \in I_+} \alpha_i e_i\right).$$

Or,

$$\Phi\left(\sum_{i \in I_+} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i, i' \in I_+} \alpha_i \alpha_{i'} \varphi(e_i, e_{i'}) = \sum_{i \in I_+} \alpha_i^2 \Phi(e_i) \geqslant 0$$

et, de même,

$$\Phi\left(\sum_{j \in J_-} \beta_j f_j\right) = \sum_{j \in J_-} \beta_j^2 \Phi(f_j) \leqslant 0.$$

L'égalité de ces deux termes impose donc

$$\sum_{i \in I_+} \alpha_i^2 \Phi(e_i) = \sum_{j \in J_-} \beta_j^2 \Phi(f_j) = 0.$$

Comme les $\Phi(f_j)$ sont tous strictement négatifs, cela impose qu'ils sont tous nuls. Puisque les e_i, $i \in I_+ \cup I_0$ forment une famille libre, on a également que les α_i sont tous nuls.

Vu que la famille $\mathcal{F}$ est libre, elle compte au plus n éléments :

$$\mathrm{Card}(I_+) + \mathrm{Card}(I_0) + \mathrm{Card}(J_-) \leqslant n = \mathrm{Card}(I_+) + \mathrm{Card}(I_0) + \mathrm{Card}(I_-).$$

Nous avons donc bien démontré que $\mathrm{Card}(J_-) \leqslant \mathrm{Card}(I_-)$ et donc, d'après la discussion qui précède, que $\mathrm{Card}(J_-) = \mathrm{Card}(I_-)$

On montre de la même manière que $\mathrm{Card}(J_+) = \mathrm{Card}(I_+)$. □

2.3.4 (*) Réduction des formes bilinéaires alternées

Intéressons-nous ensuite à la réduction des formes bilinéaires alternées. Celle-ci est plus simple que celle des formes symétriques. Le résultat est le suivant :

Théorème 30. *Soit b une forme bilinéaire antisymétrique sur E. Le rang r de b est pair et il existe une base de E dans laquelle la matrice de b est diagonale par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

avec $r/2$ blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Commençons la preuve de ce théorème par un lemme :

Lemme 31. *Soient b une forme bilinéaire antisymétrique sur E et F un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} b = \{x \in E | \forall y \in E, b(x,y) = 0$. *Alors la restriction de b à F est non-dégénérée :*

$$\forall x \in F, x \neq 0, \exists y \in F \text{ tel que } b(x,y) \neq 0.$$

Démonstration. Comme $x \notin \operatorname{Ker} b$, il existe $y_0 \in E$ tel que $b(x,y_0) \neq 0$. Puisque $E = F \oplus \operatorname{Ker} b$, nous pouvons écrire $y_0 = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in \operatorname{Ker} b$. On a alors

$$0 \neq b(x,y_0) = b(x,y) + b(x,z) = b(x,y)$$

(où nous avons utilisé le fait que $z \in \operatorname{Ker} b$ pour écrire que $b(x,z) = 0$. Nous avons donc trouvé $y \in F$ tel que $b(x,y) \neq 0$. Ceci montre que $\operatorname{Ker} b|_F = \{0\}$. □

Preuve du théorème 30. Choisissons un supplémentaire F de $\operatorname{Ker} b$. On a alors que la restriction de b à F est non-dégénérée. Nosu allons procéder par récurrence forte sur la dimension de F pour trouver une base $\mathcal{B}'$ (de F) dans laquelle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(b)$ a la forme souhaitée. Il suffira ensuite de compléter $\mathcal{B}'$ en une base de E avec des éléments de $\operatorname{Ker} b$ pour obtenir une matrice de la forme souhaitée.

Si $F = \{0\}$, il n'y a rien à faire. Sinon, si $F \neq \{0\}$, prenons un vecteur $e_1 \in F$, $e_1 \neq 0$, quelconque. Puisque b est non-dégénérée sur F, il existe un vecteur e_2 tel que $b(e_1,e_2) \neq 0$ et, quitte à remplacer e_2 par $-\frac{1}{b(e_1,e_2)}e_2$, on peut supposer que $b(e_1,e_2) = -1$, de sorte que la matrice de b (réduite à $\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$) dans la base (e_1,e_2) est

$$\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2)}(b) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $F' = \{x \in F, b(x,e_1) = b(x,e_2) = 0\}$. F_2 est un sous-espace vectoriel de F de dimension au moins ègale à $\dim(F) - 2$. Or, si $x \in \operatorname{Vect}(e_1,e_2) \cap F'$, on a $x = \alpha e_1 + \beta e_2$ et

$$\begin{aligned} 0 &= b(x,e_1) = \alpha b(e_1,e_1) + \beta b(e_2,e_1) = 0\alpha - \beta b(e_1,e_2) = \beta \\ 0 &= b(x,e_2) = \alpha b(e_1,e_2) + \beta b(e_2,e_2) = \alpha - \beta b(e_2,e_2) = \alpha \end{aligned}$$

Donc $x = 0$: $F' \cap \operatorname{Vect}(e_1,e_2) = \{0\}$. On a donc que $F = F' \oplus \operatorname{Vect}(e_1,e_2)$. Finalement, la forme quadratique b restreinte à F' est non-dégénérée car, si $x \in F'$, il existe $y_0 \in F$ tel que $b(x,y_0) \neq 0$. Posons $y_0 = y + \alpha e_1 + \beta e_2$ avec $y \in F'$. On a alors

$$0 \neq b(x,y_0) = b(x, y + \alpha e_1 + \beta e_2) = b(x,y) + \alpha b(x,e_1) + \beta b(x,e_2) = b(x,y),$$

ce qui montre qu'il existe $y \in F'$ tel que $b(x,y) \neq 0$. □

2.4 Exercices

Exercice 2.2. Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$.

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice B représentant b dans la base $\mathcal{B}_0$.
3. b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Déterminer la partie symétrique b_s et la partie antisymétrique b_a de b.
4. Déterminer le rang de b.

Mémes questions avec $b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 - 2x_3y_3$.

Exercice 2.3. Soit b la forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. b est-elle symétrique ? antisymétrique ? Quel est son rang ?
2. Pour toute paire $(u, v) \in E^2$, déterminer $b(u, v)$.
3. Justifier que la famille $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 - e_3)$ est une base de E.
4. Déterminer de deux manières la matrice B' représentant b dans la base $\mathcal{B}$.
5. Notons b_s la partie symétrique de b et notons B_s sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_0$. Déterminer B_s.
6. Soit f un endomorphisme de E dont on note A la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}_0$. Montrer que B_sA est une matrice symétrique si et seulement si on a, pour tout $(u, v) \in E^2$, $b_s(u, f(v)) = b_s(f(u), v)$.

Exercice 2.4. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $b(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q'(t)dt$.

1. Justifier que b est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice B de b dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ de E.
3. Quel est le rang de b ?
4. On considère l'application $b_1 : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $b_1(P, Q) = \displaystyle\int_0^1 P'(t)Q(t)dt$ et B_1 sa matrice représentative dans la base canonique. Quel est le lien entre b et b_1 ? Déterminer la partie symétrique b_s et la partie antisymétrique b_a de b.
5. A-t-on $b(P, P) \geqslant 0$ pour tout polynôme P ? A quelle condition a-t-on $b(P, P) = 0$?

Mêmes questions avec $b(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(1-t)dt$ et $b_k(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2.5. Dans $E = M_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel réel des matrices réelles carrées d'ordre 2, on considère l'application $b : E^2 \to \mathbb{R}$ définie par $b(A, B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1. Prouver que b est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. Prouver que pour tout $A \in E$, on a $b(A, A) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $A = O_2$.
3. Donner la matrice représentative de b dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de E.
4. En déduire le rang de b.

Exercice 2.6. Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\Phi((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_3^2$

1. Montrer que Φ est une forme quadratique sur E et calculer la forme bilinéaire symétrique φ associée.
2. Réduire Φ en utilisant la méthode de Gauss.
3. Réduire les formes quadratiques suivantes : $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 8x_2x_3$, $x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_1x_3$.