# Université de Tours 2019-2020

# L2-S3 UE 3-1 Algèbre

# Feuille d'exercices 4

**Exercice 1**

1) En ne justifiant que les réponses négatives, les applications suivantes de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ ($n$ et $p$ à préciser pour chacun des cas) sont-elles linéaires ? Quelles sont les formes linéaires ? les endomorphismes ?

Dans le cas où elles sont linéaires, déterminer leur noyau et leur image en donnant une base et leur dimension. Préciser lesquelles sont injectives, surjectives ou bijectives.

a)$f_0(x, y) = (x + y, xy)$ b)$f_1(x, y) = (x, 2y, x - 3y)$ c)$f_2(x, y) = x^2$

d)$f_3(x, y, z) = (x, y)$

e)$f_4(x, y, z) = (0, x + y + z + 1)$ f)$f_5(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$

g)$f_6(x, y, z) = (2x - 3z, y, x - 2z)$ h) $f_7(x, y, z) = 2x - y - z$ .

2) Quelle est la forme générale des formes linéaires de $\mathbb{R}^3$ ? Généralisez. Quel est le noyau d'une forme linéaire non nulle ?

3) Donner deux justifications au fait que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de $p$ équations linéaires à $n$ inconnues est un s-ev de $\mathbb{R}^n$. Que représente le système pour ce s-ev ?

**Exercice 2**

Soient $f$ et $g$ deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$.

1) Comparer $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f + g)$.

2) Comparer $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im}(f + g)$.

3) Comparer $\ker f$ et $\ker f^2$.

4) Comparer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Im} f^2$.

5) Montrer que $\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

6) Montrer que $E = \mathrm{Im} f \oplus \ker f \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Leftrightarrow \ker f = \ker f^2$.

**Exercice 3**

Soit $E = \mathbb{K}[X]$. On considère les applications $f$ et $g$ de $E$ vers $E$ définies par :

$f(P) = P'$ et $g(P) = XP$.

1) Montrer que $f$ et $g$ sont des applications linéaires.

2) Les applications $f$ et $g$ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

3) Qu'en déduisez-vous quant à la dimension de $E$ ?

**Exercice 4**

Soit $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$. L'application linéaire $f$ peut-elle être bijective, injective, surjective ?
Même question si $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

**Exercice 5**

Soient $F = \text{Vect}((1,1,0))$ et $G = \text{Vect}((1,-1,1),(0,1,1))$ .

1) Montrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Soit $p$ (resp.$q$) la projection sur $F$ parallèlement à $G$ (resp. sur $G$ parallèlement à $F$).

Déterminer $p(u)$ et $q(u)$ pour tout $u = (a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit $s$ la symétrie par rapport à $F$ parallèlement à $G$, déterminer $s(u)$ pour tout $u = (a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminer les applications $s \circ s$, $s \circ p$ et $s \circ q$.

**Exercice 6**

1) Citer des endomorphismes classiques qui peuvent être interprétés géométriquement. Comment les reconnaître et les caractériser ?

2) Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(x,y,z) = (2x-3z, y, x-2z)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (Le $f_6$ de l'exercice 1). Reconnaître et caractériser $f$, puis $-f$.

**Exercice 7**

Soient $f$ et $g$ des endomorphismes de $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n$.
Prouver les inégalités suivantes :

1. $rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$
2. $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f-g)$
3. $|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g)$
4. $rg(g \circ f) \leqslant \min(rg(f), rg(g))$
5. $rg(f) + rg(g) - n \leqslant rg(g \circ f)$

(Indication : étudier l'application linéaire $h$ de $\ker(g \circ f)$ dans $\ker(g)$ induite par $f$ et penser au théorème du rang).