T D 3

Séries de fonctions

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \geq \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} f_k(n) \leq \sup_{x \geq 0} \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

b) En déduire que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
3) Montrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[0, a]$, avec $a > 0$.
4) En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$

2 Pour tout n $\in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + nx^2)}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) Montrer que la convergence est normale sur $[0, +\infty[$. En déduire que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$, on pose $f_n(x) = nxe^{-n^2 x}$.

1) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. On désigne par $f(x)$ sa somme.
2) La série converge-t-elle normalement sur $[0, +\infty[$?
3) Montrer f est continue sur $]0, +\infty[$.
4) On se propose de montrer que f n'est pas continue en 0.
a) Montrer que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on a $\dfrac{k}{n^2} e^{-1} \leq f_k\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En déduire que

$$\frac{n+1}{2n} e^{-1} \leq \sum_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{1}{n}\right) \leq f\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Montrer que f n'est pas continue en 0.

4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n^2+x^2)}$.

1) Montrer que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2) On pose $f_n(x) = \frac{1}{n(n^2+x^2)}$

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2|x| \leq 1+x^2$.

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n(n^2+x^2)}.$$

4) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ sous forme d'une somme de série.

5 Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par $f_n(t) = \ln\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right)$ et on considère la série de fonctions de terme générale f_n.

1) Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note f sa somme.

2) Montrer que la convergence de cette série de fonctions n'est pas normale sur $\mathbb{R}$.

3) Soit $a > 0$. Montrer que la convergence est normale sur $[-a, a]$. En déduire que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$.

6 On considère sur $[0, +\infty[$ la série de fonctions:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\ .$$

1) Montrer que cette série converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

2) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

3) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

7 1) Montrer que la série de fonctions $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

2) Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

3) Montrer que f est dérivable sur $[0, 1[$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de x.

4) Montrer pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) = \arctan(x)$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)} = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$