TD 3

Intégrales généralisées

1 Calculer les intégrales généralisées en montrant au passage leur convergence :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\ ; \quad \int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x\ ; \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x\ ; \quad \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x.$$

2 À l'aide des majorations, minorations ou équivalents et des intégrales de référence, déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales généralisées :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+|\sin x|}\ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{2+\cos x}{1+x^2}\,dx\ , \quad \int_1^{+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx\ , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,dx\ ,$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sqrt{x}\,dx\ , \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx\ , \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx\ , \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx.$$

3 * Déterminer pour quelles valeurs du réel α les intégrales suivantes sont convergentes

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)x^\alpha}\ , \quad \int_1^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha - x^\alpha}{x^2}\,dx.$$

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$.

1) Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Calculer I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

3) En déduire la valeur de I_n, $n \in \mathbb{N}^*$

5 Montrer que les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(t)\,dt\ ; \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{1+t}{1+t^2+t^4}\,dt\ ; \qquad \int_2^{+\infty} \left(1+\ln\frac{1}{t}\right)\,\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

6 1) Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx.$$

Indication : utiliser la règle d'Abel et la formule $\sin^2 x = (1-\cos(2x))/2$.

2) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$ est divergente.

Indication : utiliser le développement limité sous la forme $\ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2}(1+o(1))$.

7 Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+\cos x}\, dx\,, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+x+1}\, dx$$

8 * On cherche à montrer pour $a, b > 0$ la formule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

1) Soit $0 < a < b$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt$ est convergente.

2) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\, dt = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt.$$

3) Montrer que

$$e^{-b\varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \le \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \le e^{-a\varepsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

4) Conclure (pensez à étudier tous les cas possibles sous l'hypothèse $a, b > 0$).

9 * **(i)** Etudier la convergence et la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t \ln t}\, dt$.

(ii) Montrer que les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\int_{2020}^{+\infty} \frac{\cos \sqrt{t}}{t^\alpha}\, dt \ \left(\text{pour } \alpha > \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\beta} e^{\cos t}\, dt \ (\text{pour } \beta > 0).$$

Pour quelles valeurs de α / de β on peut esquiver l'utilisation de la règle d'Abel ?

10 * (entraînement) Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes :

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2}\, dt$; (2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt$; (3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^2 t\, dt$; (4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-t}}{t}\, dt$;

(5) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt$; (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{t^2}\, dt$; (7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt$; (8) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}}\, dt$

NB: dans les cas (4) et (7) l'intégrande est prolongeable par continuité en $t = 0$.
Dans les autres cas, elle est continue sur l'intervalle étudié.